TỰ LUẬN
&
TRẮC NGHIỆM

TRẦN BÁ HÀ - NGUYỄN SINH NGUYÊN
NGUYỄN VĂN NHO - LÊ HOÀNH PHÒ

BỒI DƯỠNG TOÁN HÌNH HỌC 10

- *Biên soạn theo chương trình và SGK mới của Bộ GD & ĐT*
- *Tài liệu bổ trợ dành cho HS chương trình phân ban*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN BÁ HÀ - NGUYỄN SINH NGUYÊN
NGUYỄN VĂN NHO - LÊ HOÀNH PHÒ

BỒI DƯỠNG TOÁN
HÌNH HỌC
10

TỰ LUẬN & TRẮC NGHIỆM
- Biên soạn theo chương trình và SGK mới của Bộ GD & ĐT
- Tài liệu bổ trợ dành cho HS chương trình phân ban

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Cuốn sách *Bồi dưỡng Toán Hình học 10* này được biên soạn nhằm mục đích hỗ trợ cho các bạn học sinh tự rèn luyện thêm sau khi nắm vững các kiến thức và bài tập căn bản ở SGK. Vì lẽ đó, mặc dù thứ tự các chương giống với SGK (2006), nhưng các mục và tiểu mục đôi khi được gộp lại, hoặc bỏ qua vì xét thấy không cần thiết. Đặc biệt, chương ba dài nhất, bởi nó là sự tích hợp các kiến thức trước đó, và một khi đã có nhiều kiến thức được chuẩn bị trước đó, thì các vấn đề mở rộng, các bài tập nâng cao sẽ phong phú hơn...

Những người biên soạn hi vọng các bạn tìm thấy một đôi điều bổ ích khi sử dụng sách này. Cuốn sách có thể còn nhiều thiếu sót về cả nội dung lẫn hình thức, và nhóm biên soạn chân thành cảm ơn vì những góp ý có thể có của các bạn trong tương lai.

Những người biên soạn

TRẦN BÁ HÀ
NGUYỄN SINH NGUYÊN
NGUYỄN VĂN NHO
LÊ HOÀNH PHÒ

Chương 1

VECTƠ

---

§ 1. CỘNG, TRỪ VECTƠ, NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1.1. Tóm tắt kiến thức cần nhớ

- Nếu vectơ có điểm đầu là M và điểm cuối là N thì ta kí hiệu vectơ đó là $\overrightarrow{MN}$. Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là *vectơ-không*, kí hiệu là $\vec{0}$. *Độ dài* của $\overrightarrow{AB}$ là *khoảng cách giữa hai điểm* A và B. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$. Như vậy, ta có $|\vec{0}| = 0$.

- Hai vectơ tơ được gọi là *cùng phương* nếu chúng nằm trên hai đường thẳng song song, hoặc cùng nằm trên một đường thẳng. Nếu hai vectơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng, hoặc chúng ngược hướng. Người ta quy ước: Vectơ-không cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *bằng nhau*, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

- Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A nào đó ta vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, rồi từ điểm B vẽ tiếp $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AC}$ được gọi là *tổng của hai vectơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Kí hiệu: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

- *Vectơ đối* của vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$. Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

- *Hiệu* của hai vectơ là tổng của vectơ thứ nhất với vectơ đối của vectơ thứ hai.

- Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

  a) Nếu $k \geq 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

  Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

b) Độ dài vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|$ lần độ dài vectơ $\vec{a}$:

$$|k\vec{a}| = |k|.|\vec{a}|.$$

- *Tính chất:* Về mặt hình thức, các phép toán cộng, trừ vectơ và nhân vectơ với một số vô hướng có những tính chất giống như các phép toán cộng, trừ và nhân các số thực đã biết:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$
$$k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}$$
$$(k + h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$$
$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$
$$1.\vec{a} = \vec{a}\ ;\ (-1)\vec{a} = -\vec{a}\ ;$$
$$0.\vec{a} = \vec{0}\ ;\ k.\vec{0} = \vec{0}.$$

Một số kết quả thường được vận dụng trong giải toán:

- Nếu M là trung điểm NP thì $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PN} = \vec{0}$.
- Với bất kì ba điểm M, N, P ta luôn luôn có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$. Mở rộng ra, với n điểm bất kì $A_1, A_2, ..., A_n$ ta luôn có

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

- Nếu OABC là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$ (*Quy tắc đường chéo hình bình hành*).
- Nếu $\overrightarrow{MN}$ là một vectơ đã cho, thì với điểm O bất kì ta luôn có thể viết: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.
- Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ (khác $\vec{0}$) khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$.
- Để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng, điều kiện cần và đủ là tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- Điều kiện cần và đủ để C là trung điểm AB là $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.
- Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều có thể biểu thị một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Nghĩa là: có duy nhất cặp số m và n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.
- G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

- Nếu I là điểm bất kì và G là trọng tâm tam giác ABC thì $3\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}$, hay $3\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$.
- Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

Chứng minh. Giả sử G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và A'B'C'. Vì G' là trọng tâm tam giác A'B'C' nên:

$$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}$$

$$=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}.$$

($\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ do G là trọng tâm tam giác ABC). Vậy

$$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}.$$

Từ đó suy ra rằng điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

1.2. Một số dạng toán

Bài 1. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}.$$

Giải

Cách 1. Ta có

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}$$

$$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD},$$

suy ra $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

Đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

Cách 2. Lấy một điểm O nào đó tuỳ ý, phân tích mỗi vectơ thành hiệu hai vectơ có điểm đầu là O, ta được:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Trong bài trên, ta đã sử dụng quy tắc chen một hay nhiều điểm để chứng minh một đẳng thức vectơ.

Bài 2. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng các điểm M, N, P nằm trên đường tròn (O) nếu: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$. Khi đó, có thể nói gì về vị trí của các điểm M, N, P tương ứng so với các điểm C, A, B ?

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$, với các điểm M, N, P như trên.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ nên OAMB là hình thoi. Suy ra AOM là tam giác cân tại A, ngoài ra, AB là trung trực của OM. Từ đó, AOM là tam giác đều, suy ra OM = OA. Vậy M phải nằm trên đường tròn (O). Tương tự như thế cho N và P.

Do tam giác ABC đều nên CO là trung trực AB. Suy ra M là điểm đối tâm của C. Tương tự, N, P tương ứng là điểm đối tâm của A và B.

b) Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$. Suy ra

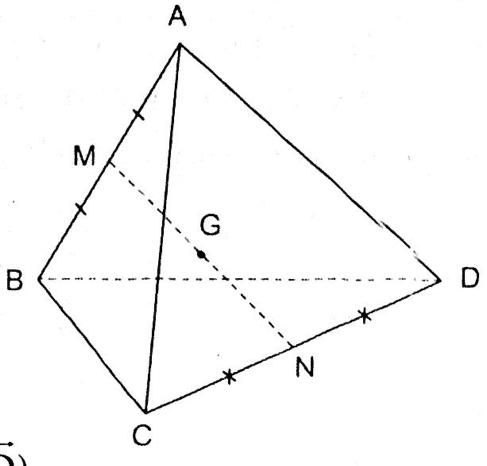
$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}.$$

Nhận xét. Quy tắc chủ yếu để giải bài toán trên (câu a) là *quy tắc đường chéo hình bình hành* của phép cộng hai vectơ.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng tỏ rằng

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

Giải



Ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN},$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

Do $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$, nên

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

Nhận xét. Trong bài toán trên, ta đã chen điểm để có thể áp dụng được tính chất trung điểm:

Nếu M là trung điểm NP thì $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PN} = \vec{0}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm thoả mãn điều kiện:

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

a) Chứng minh rằng I là trọng tâm tam giác BCD, trong đó D là trung điểm cạnh AC.

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Giải

a) Ta có:

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) = \vec{0}.$$

Vậy I là trọng tâm tam giác BCD.

b) $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Vậy: $\overrightarrow{AI} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{5} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{2} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD. Gọi G là điểm sao cho

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng G được xác định một cách duy nhất. Khi đó, G được gọi là trọng tâm của tam giác ABCD. Hãy dựng điểm G.

Giải

Lấy một điểm O xác định nào đó, ta có:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} =\\ &\quad = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG}\\ &\quad = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{OG}.\end{aligned}$$

Do đó $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

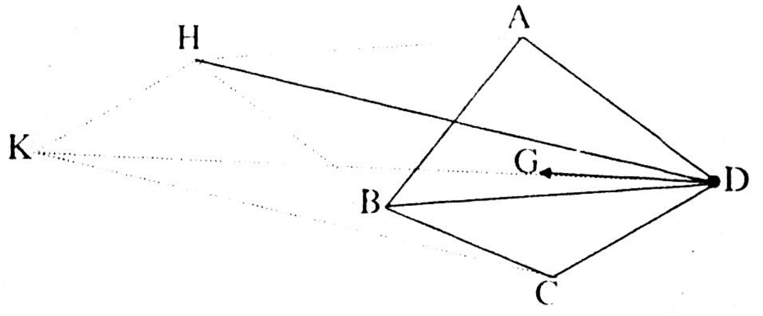
Suy ra điểm G được xác định một cách duy nhất.

Để dựng điểm G ta có thể chọn O trùng với D. Khi đó:

$$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}).$$

Suy ra cách dựng như sau:

Gọi H, K là hai điểm sao cho DAHB và DHKC là hai hình bình hành. Từ đó, $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$. Sau cùng, chọn G trên đoạn thẳng DK sao cho DG = 1/4DK. Ta có G là điểm phải dựng.



Bài 6. Cho đường tròn (O, R) và một điểm I khác với O. Một điểm M tuỳ ý nằm trên đường tròn. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Giả sử IO = d ($\neq 0$). Chứng minh $\overrightarrow{IN} = \dfrac{d}{d+R}\overrightarrow{IM}$.

Giải

Theo tính chất đường phân giác của tam giác MOI ta có

$$\frac{IN}{NM} = \frac{IO}{OM} = \frac{d}{R}.$$

Suy ra $\dfrac{IN}{IN + NM} = \dfrac{d}{d+R} \Leftrightarrow \dfrac{IN}{IM} = \dfrac{d}{d+R}$. Vì hai vectơ $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng nên đẳng thức trên có nghĩa là: $\overrightarrow{IN} = \dfrac{d}{d+R}\overrightarrow{IM}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC.

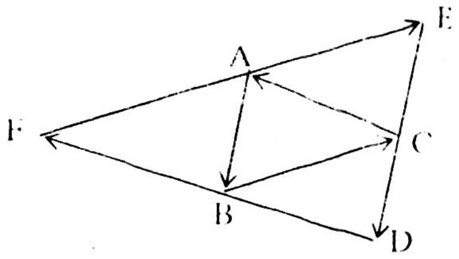
a) Chứng minh rằng với mọi điểm M, các điểm D, E, F trong các đẳng thức vectơ sau đều là các điểm cố định:

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}.$$

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.

Giải

a) Từ $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$ ta có $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Như vậy, D không phụ thuộc vào vị trí của điểm M và là đỉnh thứ tư của hình bình



hình ABDC. Tương tự, $\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ nên E là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCE. Sau cùng, vì

$$\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CA}$$

nên F là đỉnh thứ tư của hình bình hành ACBF.

Vì A, B, C cố định nên D, E, F cố định.

b) Theo giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$$

$$=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$$

P1. Cho tam giác vuông cân OAB với OA = OB = a. Tính độ dài của: $\vec{u}=\frac{21}{4}\overrightarrow{OA}+2{,}5\overrightarrow{OB}$; $\vec{v}=\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

P2. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hãy biểu thị các vectơ sau đây qua các vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.

P3. Cho hình bình hành ABCD.

a) Tính độ dài của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{BD}.$$

P4. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi I là trung điểm AC.

a) Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IC}$.

b) Tính độ dài của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

P5. Cho G là trọng tâm, H là trực tâm, I và O là tâm đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác ABC. Kí hiệu a, b, c lần lượt là độ dài ba cạnh đối của các đỉnh A, B, C. Chứng minh:

a) $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$,

b) $(a+b+c)\overrightarrow{OI}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$,

c) $(a+b+c)\overrightarrow{HI}=a\overrightarrow{HA}+b\overrightarrow{HB}+c\overrightarrow{HC}$.

P6. Cho tứ giác ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB}=-2\overrightarrow{QC}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ qua các vectơ $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$.

P7. Cho hai điểm A, B và hai số thực a, b sao cho $a + b \neq 0$.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm M thỏa mãn $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với điểm M xác định như trên thì mọi điểm N ta đều có $a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NB} = (a + b)\overrightarrow{NM}$.

P8. Cho ba điểm A, B, C và ba số thực a, b, c mà $a + b + c \neq 0$.

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm M thỏa mãn $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, và nếu gọi N là điểm tuỳ ý, ta luôn có

$$a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NB} + c\overrightarrow{NC} = (a + b + c)\overrightarrow{NM}.$$

P9. Cho ABCD là hình bình hành. Hãy xác định số thực m và một điểm M cố định sao cho mỗi hệ thức sau đây được thoả mãn với mọi điểm N:

a) $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = m\overrightarrow{NM}$;

a) $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = m\overrightarrow{NM}$.

P10. Cho đường tròn (O ; R) và hai điểm A, B cố định.Với mỗi điểm M ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng khi điểm M chạy trên (O ; R) thì điểm M' chạy trên một đường tròn cố định bán kính R.

P11. Cho hệ hữu hạn các điểm A_1 , A_2 , . . . A_n. Chứng minh rằng có duy nhất một điểm G sao cho $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$. Điểm G được gọi là *trọng tâm của hệ điểm* đã cho. Chứng minh rằng với mọi điểm K ta đều có: $\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2} + ... + \overrightarrow{KA_n} = n\overrightarrow{KG}$.

P12. Cho n bộ (A_i, m_i), với i = 1, 2,..., n, trong đó A_i là các điểm còn m_i là những số thực dương. Ta nói trọng tâm của hệ n bộ (A_i, m_i) là một điểm T sao cho:

$$m_1\overrightarrow{TA_1} + m_2\overrightarrow{TA_2} + ... + m_n\overrightarrow{TA_n} = 0.$$

Chứng minh rằng với mọi n bộ như đã nói trên, trọng tâm luôn luôn tồn tại và duy nhất.

P13. Cho đường tròn (O, R) và điểm A cố định thuộc đường tròn. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn, ta kẻ từ đó tới đường tròn tiếp tuyến MT

(T là tiếp điểm). Tia MA cắt đường tròn tại A'. Giả sử A khác A' và $\overrightarrow{MT} = k\overrightarrow{MA}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1-k^2}\overrightarrow{AA'}$.

P14. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 1 và các tam giác đều CDE, BCF sao cho E nằm trong và F nằm ngoài hình vuông. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$ và $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{c}$.

b) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{EF}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{c}$.

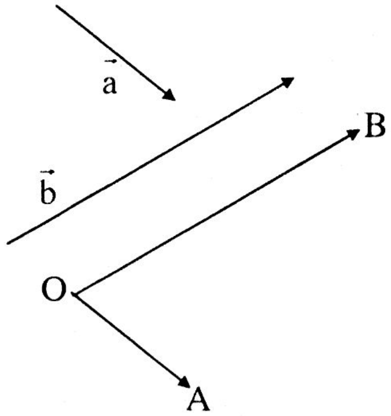
c) Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng .

d) Tính độ dài đoạn thẳng EF.

§ 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

2.1. Tóm tắt kiến thức cần nhớ

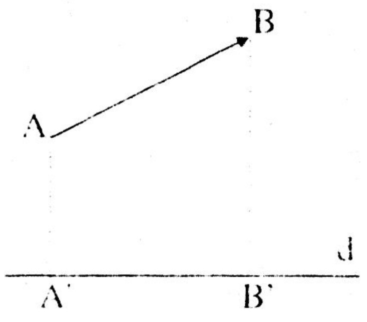
- Trong chương này, các tỉ số lượng giác đã biết ở lớp 9 cho một góc nhọn được mở rộng ra cho các góc tù theo quy tắc: *Hai góc bù nhau có sin bằng nhau, còn cosin, tang và cotang của chúng đối nhau.*
- Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ-không. Từ một điểm O (tuỳ ý) nào đó ta vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó: Số đo của góc AOB được gọi là *số đo góc hợp bởi hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, hoặc đơn giản, là *góc giữa hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$. Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ-không thì ta có thể xem góc giữa hai vectơ đó là bao nhiêu cũng được. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0$ thì ta nói rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *vuông góc* với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$.



- *Tích vô hướng* của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

- Với vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý, tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $(\vec{a})^2$ hay đơn giản hơn, $\vec{a}^2$, và gọi là *bình phương vô hướng* của $\vec{a}$. Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.



Cho vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và đường thẳng (d). Gọi A' và B' là hình chiếu vuông góc của A và B trên (d). Khi đó vectơ $\vec{a'} = \overrightarrow{A'B'}$ được gọi là *hình chiếu* của vectơ $\vec{a}$ trên đường thẳng d.

- Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì ta có *công thức hình chiếu*:
  $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b'}$, trong đó $\vec{b'}$ là hình chiếu của vectơ $\vec{b}$ trên đường thẳng chứa vectơ $\vec{a}$.
- Cho vectơ $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ cố định. Khi đó, tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} = k$, trong đó k là một số không đổi, là đường thẳng vuông góc với AB tại H, với H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng OB.
- *Các tính chất của tích vô hướng*

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}\ ;\ (k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})\ ;\ \vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c},$$

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}\ ;\quad (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2.$$

2.2. Một số dạng toán

Bài 8. Cho H là trực tâm, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Kí hiệu a, b, c lần lượt là độ dài ba cạnh đối của các đỉnh A, B, C. Hãy chứng minh hệ thức

$$(a+b+c)^2 HI^2 = (a+b+c)(aHA^2 + bHB^2 + cHC^2) - abc(a+b+c).$$

Giải

Từ hệ thức ở bài tập P7, ta có:

$$(a+b+c)\vec{HI} = a\vec{HA} + b\vec{HB} + c\vec{HC}.$$

Bình phương vô hướng hai vế đẳng thức trên và sử dụng các hệ thức:

$$2\vec{HA}.\vec{HB} = \vec{HA}^2 + \vec{HB}^2 - (\vec{HA} - \vec{HB})^2$$

$$= HA^2 + HB^2 - BA^2 = HA^2 + HB^2 - c^2;$$

$$2\vec{HC}.\vec{HB} = HC^2 + HB^2 - a^2; \quad 2\vec{HA}.\vec{HC} = HA^2 + HC^2 - b^2,$$

ta được

$$(a+b+c)^2HI^2 = a^2HA^2 + b^2HB^2 + c^2HC^2$$

$$+2ab\vec{HA}.\vec{HB} + 2ac\vec{HA}.\vec{HC} + 2bc\vec{HB}.\vec{HC}$$

$$= a^2HA^2 + b^2HB^2 + c^2HC^2 + ab(HA^2 + HB^2 - c^2)$$

$$+ac(HA^2 + HC^2 - b^2) + bc(HB^2 + HC^2 - a^2)$$

$$= (a+b+c)(aHA^2 + bHB^2 + cHC^2) - abc(a+b+c).$$

Bài 9. Cho tam giác đều ABC cạnh a và cho hai điểm M, N sao cho $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ và $\vec{AN} = k\vec{AC}$.

Hãy tìm giá trị k trong mỗi trường hợp sau:

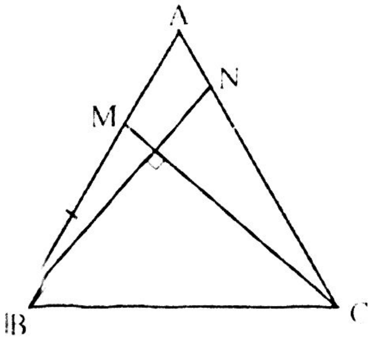
a) $BN \perp CM$;

b) Góc hợp bởi $\vec{BN}$ và $\vec{CM}$ bằng 120°.

Giải

Ta có: $\vec{BN} = \vec{AN} - \vec{AB} = k\vec{AC} - \vec{AB}$;

$$\vec{CM} = \vec{AM} - \vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \vec{AC}.$$



Vậy $\vec{BN}.\vec{CM} = (k\vec{AC} - \vec{AB})(\frac{1}{3}\vec{AB} - \vec{AC}) =$

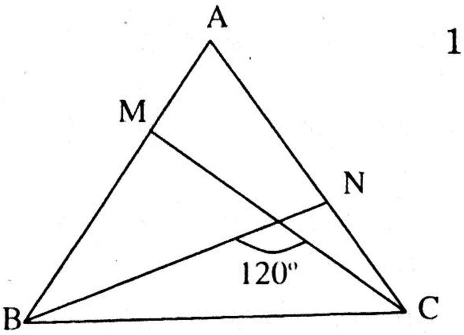
$$= \frac{k}{3}.\vec{AC}.\vec{AB} - k\vec{AC}^2 - \frac{1}{3}\vec{AB}^2 + \vec{AB}.\vec{AC}$$

$$= \frac{k}{3}.a^2\cos 60^\circ - ka^2 - \frac{1}{3}a^2 + a^2.\cos 60^\circ$$

$$= \frac{ka^2}{6} - ka^2 - \frac{1}{3}a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{ka^2 - 6ka^2 - 2a^2 + 3a^2}{6}.$$

Suy ra ta có $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CM} = \frac{a^2}{6}(1-5k)$. (1)

a) Để BN⊥CM thì $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CM} = 0$ hay $\frac{a^2}{6}(1-5k) = 0$, suy ra



$$1 - 5k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{5}.$$

b) Vì góc hợp bởi BN và CM là 120^o nên:

$$\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CM} = BN.CM\cos 120^o =$$

$$= -\frac{1}{2}BN.CM. \qquad (2)$$

Theo trên: $\overrightarrow{BN}^2 = (k.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = a^2(k^2 - k + 1)$

$$\Rightarrow BN = a.\sqrt{k^2 - k + 1}.$$

$$\overrightarrow{CM}^2 = (\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = a^2(\frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1) = a^2.\frac{7}{9} \Rightarrow CM = a\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{a^2}{6}(1-5k) = -\frac{1}{2}.a\sqrt{k^2 - k + 1}.a\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$5k - 1 = \sqrt{k^2 - k + 1}.\sqrt{7} \qquad (3)$$

Vì $k^2 - k + 1$ luôn dương với mọi giá trị của k nên điều kiện của vế trái phải là: $5k - 1 > 0$ hay $k > \frac{1}{5}$. Bình phương hai vế của (3) ta được: $6k^2 - k - 2 = 0$. Giải phương trình này, loại nghiệm âm ta được: $k = \frac{2}{3}$.

Bài 10. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và G là trọng tâm của một tam giác ABC. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó, đặt a = BC, b = CA, c = AB. Chứng minh rằng

$$R^2 - OG^2 \geq \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Giải

Gọi các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ lần lượt là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi đó

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

Suy ra $9OG^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a})$. Ta có

$$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = R^2,$$

$$2\vec{a}\vec{b} = 2R^2\cos 2C = 2R^2 - AB^2 = 2R^2 - c^2$$

và các hệ thức tương tự: $2\vec{b}\vec{c} = 2R^2 - a^2$, $2\vec{c}\vec{a} = 2R^2 - b^2$. Từ đó,

$$9OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Ta lại có $(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (bất đẳng thức Cauchy cho ba số). Do đó $R^2 - OG^2 \geq \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

P15. Sử dụng tính chất tích vô hướng, hãy chứng minh rằng ba đường cao trong một tam giác giao nhau tại một điểm (trực tâm).

P16. Cho đoạn thẳng AB.

a) Xác định điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có:

$$\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB};$$

c) Tìm tập hợp những điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 = k^2$, với k là số không đổi.

P17. Cho hình bình hành ABCD. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$, với k là một số không đổi.

P18. Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội và ngoại tiếp tam giác ABC, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, a, b, c là các cạnh.

Chứng minh $OI^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c}$.

P19. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R.

P20. Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là trung điểm AB, E là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh rằng OE vuông góc CD nếu và chỉ nếu AB = AC.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/11558

P21. Cho hai tam giác vuông cân ABC và AB'C' cùng cân tại đỉnh chung A như hình bên. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng BB' và CC'. Chứng minh rằng $AI \perp CC'$, $AJ \perp BB'$ và $BC' \perp B'C$.

P22. a) Cho tứ giác ABCD với hai đường chéo là AC và BD. Chứng minh rằng: $AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$. Từ đó hãy suy ra điều kiện để hai đường chéo của tứ giác vuông góc.

b) Sử dụng kết quả này, chứng tỏ rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$ (với a, b, c tương ứng là độ dài ba cạnh đối của các đỉnh A, B, C).

P23. a) Ta nói điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \text{ hay } \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = k.$$

Theo định nghĩa này, M là trung điểm AB khi và chỉ khi M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k = -1$. Nếu M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$, chứng minh rằng với mọi điểm O ta có

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}.$$

b) Gọi G là trọng tâm của tứ giác ABCD và A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy tại G.

c) Tìm các tỉ số mà điểm G tương ứng chia các đoạn thẳng AA', BB', CC'.

d) Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tứ giác A'B'C'D'.

P24. Cho ba số thực $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Chứng minh rằng với mọi điểm J thỏa mãn $\alpha.\overrightarrow{JA} + \beta.\overrightarrow{JB} + \gamma.\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ ta luôn có

$$MJ^2 = \frac{\alpha.MA^2 + \beta.MB^2 + \gamma.MC^2}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{\alpha\beta.AB^2 + \beta\gamma.BC^2 + \gamma\alpha.CA^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN CÁC BÀI TẬP CHƯƠNG 1

S1. HD: Dùng định lí Py-ta-go. Đáp số:

$$|\vec{u}| = \left|\frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2{,}5\overrightarrow{OB}\right| = \frac{\sqrt{541}}{4}a,$$

$$|\vec{v}| = \left|\frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right| = \frac{\sqrt{6063}}{28}a.$$

S2. HD: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$;

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$.

S3. **a)** $\vec{u} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} =$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Vậy độ dài của vectơ $\vec{u}$ bằng 0.

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Do đó : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}$.

S4. **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MC}$.

Vậy M là đỉnh của hình bình hành ABCM.

b) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\vec{u} = \overrightarrow{BM}$.

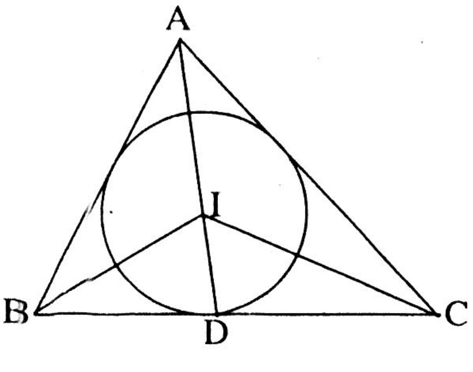
Vậy $|\vec{u}| = BM = 2BI = a\sqrt{3}$.

S5. **a)** Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \text{ hay } \overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}.$$

Suy ra $\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{DC} = -\frac{c}{b}(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID})$ hay

$$b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = (b+c)\overrightarrow{ID}. \qquad (1)$$



Do $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$ nên $\frac{DB}{DC + DB} = \frac{c}{b+c}$ hay $DB = \frac{ac}{b+c}$. Vì BI là phân giác của góc B nên lại áp dụng tính chất đường phân giác cho tam giác ADB ta có $\dfrac{ID}{IA}=\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{\dfrac{ac}{b+c}}{c}=\dfrac{a}{b+c}$. Vậy

$$\overrightarrow{ID}=-\frac{a}{b+c}\overrightarrow{IA}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta đi đến $b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=(b+c)\overrightarrow{ID}=-a\overrightarrow{IA}$, hay

$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

b) Theo câu a) ta có

$$(a+b+c)\overrightarrow{OI}=a(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{IA})+b(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{IB})+c(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{IC})$$

$$=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}-(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC})=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}.$$

c) Theo câu b) ta có

$$(a+b+c)\overrightarrow{HI}=a\overrightarrow{HA}-a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{HB}-b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{HC}-c\overrightarrow{IC}$$

$$=a\overrightarrow{HA}+b\overrightarrow{HB}+c\overrightarrow{HC}-(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC})=a\overrightarrow{HA}+b\overrightarrow{HB}+c\overrightarrow{HC}.$$

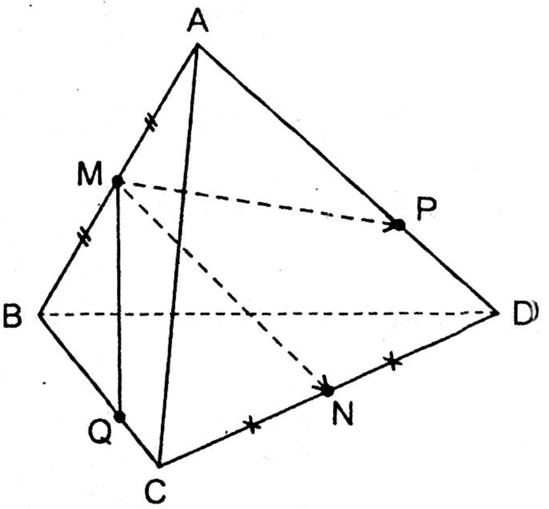
S6. Ta có

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ})$$

$$=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MQ})$$

$$=\frac{3}{4}(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}).$$



S7. **a)** Biến đổi tương đương hệ thức ở đề bài, ta có

$$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow a\overrightarrow{MA}+b(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=\frac{-b}{a+b}\overrightarrow{AB}$$

(do giả thiết a + b ≠ 0). Vì A, B cố định và a, b cho trước nên đẳng thức trên chứng tỏ rằng điểm M được xác định một cách duy nhất.

b) $a\overrightarrow{NA}+b\overrightarrow{NB}=a\overrightarrow{NM}+a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{NM}+b\overrightarrow{MB}$

$$=(a+b)\overrightarrow{NM}+a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{NM}.$$

S8. HD: Tương tự bài trên. Điểm M được xác định duy nhất từ hệ thức $\overrightarrow{AM} = \dfrac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$. (Trong trường hợp a = b = c = 1, M trùng với G, trọng tâm tam giác ABC).

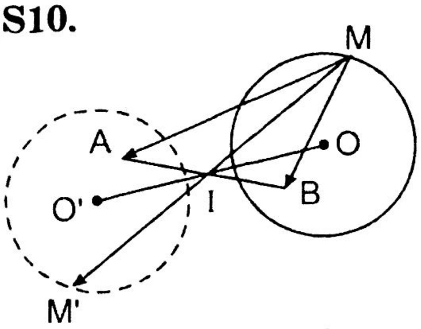
S9. **a)** Gọi M là điểm cố định xác định một cách duy nhất theo hệ thức $\overrightarrow{MA} = \dfrac{-2}{1+2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Sử dụng kết quả bài 7 ta có $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = (1+2)\overrightarrow{NM} = 3\overrightarrow{NM}$. Vậy ta chọn M như đã nói và chọn m = 3.

b) Tương tự, chọn M là điểm cố định thỏa mãn

$$2\overrightarrow{MA} + 1.\overrightarrow{MB} + (-1).\overrightarrow{MC} = \vec{0},$$

và chọn m = 2, vì ta có $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = (2+1-1)\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NM}$, theo kết quả bài 8.

S10.



Gọi I là trung điểm AB thì I cố định và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Do đó, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$, tức là MM' nhận I làm trung điểm.

Gọi O' là điểm đối xứng của O qua điểm I thì O' cố định và MOM'O' là hình bình hành nên OM = O'M = R. Suy ra M' nằm trên đường tròn cố định tâm O' bán kính R.

S11. Lấy một điểm O xác định nào đó, ta có :

$$\vec{0} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG} + \ldots\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG},$$

từ đó suy ra $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n})$.

Suy ra điểm G được xác định một cách duy nhất. Phần còn lại hiển nhiên, khi thay O bằng một điểm K tuỳ ý.

S12. Chọn O là điểm cố định trong mặt phẳng, dễ thấy :

$$m_1\overrightarrow{TA_1} + m_2\overrightarrow{TA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{TA_n} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow m_1(\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA_1}) + m_2(\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA_2}) + \ldots + m_n(\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA_n}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\overrightarrow{TO} + m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OT} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Như thế, T tồn tại và duy nhất.

S13. Ta có $MT^2 = MA.MA' \Leftrightarrow MA.MA' = k^2.MA^2$

$$\Leftrightarrow MA\left(MA' - k^2.MA\right) = 0 \Leftrightarrow MA' = k^2.MA$$

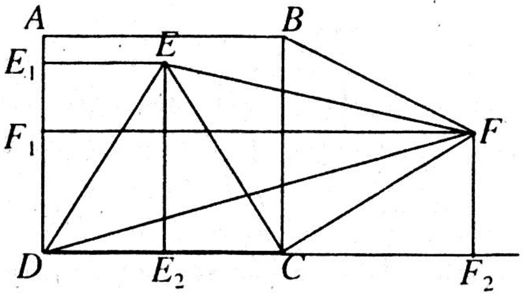
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA'} = k^2.\overrightarrow{MA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} = k^2\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \left(1 - k^2\right)\overrightarrow{AM}.$$

Vì A' và A không trùng nhau, M và A không trùng nhau nên phải có $k \neq 1$, do đó $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1-k^2}\overrightarrow{AA'}$.

S14. **a)** Gọi E_1 và E_2 lần lượt là hình chiếu của E trên hai đường thẳng DA và DC , ta có .

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DE_1} + \overrightarrow{DE_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$



Tương tự, gọi F_1 và F_2 lần lượt là hình chiếu của điểm F trên hai đường thẳng DA và DC ta có :

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DF_1} + \overrightarrow{DF_2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{c}.$$

b) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DA} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} = \frac{(\sqrt{3}-2)\vec{a} + \vec{c}}{2}$;

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{c} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$= \frac{(1-\sqrt{3})\vec{a} + (1+\sqrt{3})\vec{c}}{2}.$$

c) Từ câu (b) ta có :

$$(1+\sqrt{3})\overrightarrow{AE} = \frac{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)\vec{a} + (1+\sqrt{3})\vec{c}}{2}$$

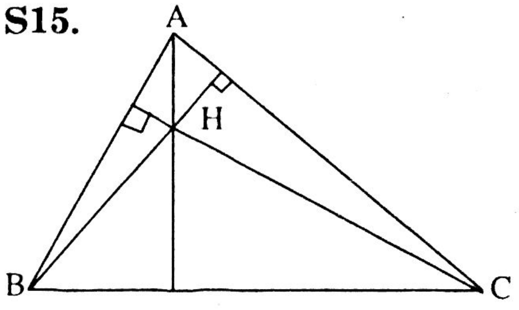
$$= \frac{(1-\sqrt{3})\vec{a} + (1+\sqrt{3})\vec{c}}{2} = \overrightarrow{EF}.$$

Vậy ba điểm A, E, F thẳng hàng.

d) $EF^2 = \left(\dfrac{(1-\sqrt{3})\vec{a}+\left(1+\sqrt{3}\right)\vec{c}}{2}\right)^2 = \dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4} = 2.$

Vậy $EF = \sqrt{2}$.

S15.



Trước hết, với bốn điểm A, B, C, H bất kì, ta luôn có

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

Thật vậy, với điểm O tuỳ ý, ta có:

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} =$$

$$= (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OH})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OH})(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}).$$

Dùng tính phân phối của tích vô hướng để khai triển rồi rút gọn, ta dễ thấy vế phải bằng 0.

Bây giờ, xét tam giác ABC, giả sử hai đường cao kẻ từ A và B cắt nhau tại H. Khi đó, $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ nên từ đẳng thức trên ta suy ra $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$, nói cách khác, $CH \perp AB$. Suy ra điều phải chứng minh.

S16. **a)** $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AI} + 3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$

b) $2\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI}) + 3(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MI}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MI} = \vec{0}.$

Suy ra : $\overrightarrow{MI} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{MB}.$

c) $2MA^2 + 3MB^2 = k^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 = k^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2 = k^2$

$\Leftrightarrow 5MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}) = k^2$

$\Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{1}{5}(k^2 - 2IA^2 - 3IB^2)$

Từ đó :

* Nếu $k^2 > 2IA^2 + 3IB^2$, tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{\dfrac{k^2 - 2IA^2 - 3IB^2}{5}}$.

* Nếu $k^2 = 2IA^2 + 3IB^2$, tập hợp các điểm M chỉ gồm duy nhất một điểm I.

* Nếu $k^2 < 2IA^2 + 3IB^2$, tập hợp các điểm M là tập rỗng.

S17. Gọi O là tâm hình bình hành ABCD ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow 4MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = k^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{1}{4}(k^2 - 2OA^2 - 2OB^2).$$

Từ đó:

* Nếu $k^2 > 2OA^2 + 2OB^2$, tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O bán kính $\frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 2OA^2 - 2OB^2}$.

* Nếu $k^2 = 2OA^2 + 2OB^2$, tập hợp các điểm M chỉ gồm duy nhất một điểm O.

* Nếu $k^2 < 2OA^2 + 2OB^2$, tập hợp các điểm M là tập rỗng.

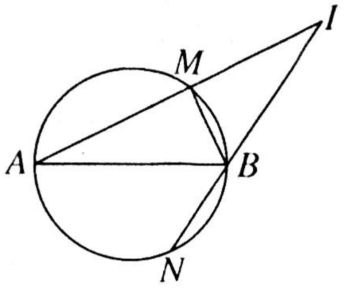
S18. Từ Câu (b)-S5 ta có : $(a + b + c)\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$. Bình phương vô hướng hai vế đẳng thức này và tương tự như phần chứng minh ở *Bài 10* ta được :

$$(a + b + c)^2 OI^2 =$$

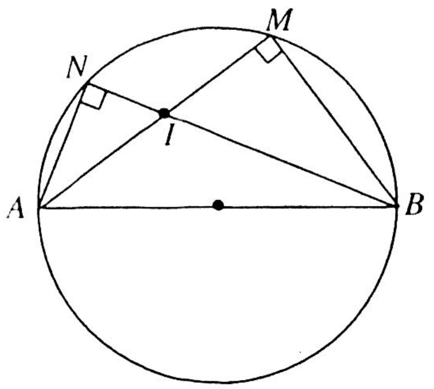
$$= (a^2 + b^2 + c^2)R^2 + ab(2R^2 - c^2) + ac(2R^2 - b^2) + bc(2R^2 - a^2)$$

$$= (a + b + c)^2 R^2 - abc(a + b + c).$$

Suy ra $OI^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a + b + c}$.



S19. Để ý, hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên đường thẳng AI là vectơ $\overrightarrow{AM}$, do vậy theo công thức hình chiếu ta có:



$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$.

Tương tự,

$\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$.

Từ đó

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$$

$$= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 = 4R^2.$$

S20. Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Suy ra

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \ \overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b},$$

với P là trung điểm AD. Từ đó,

$$\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

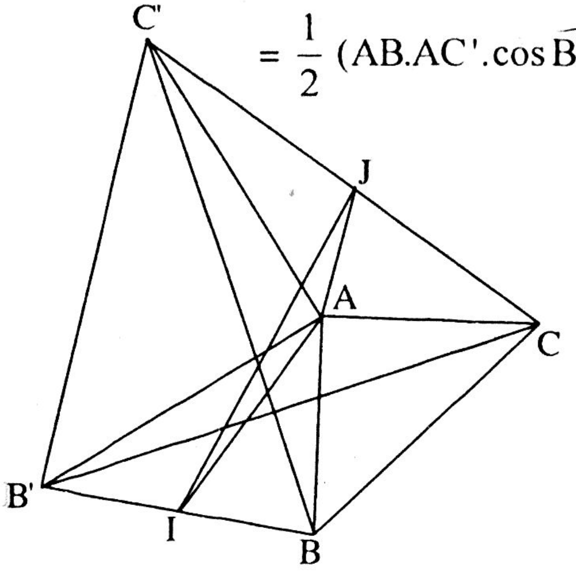
Ta lại có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$. Do đó, OE ⊥ CD nếu và chỉ nếu $(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}).(3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) = 0$. Khai triển và để ý $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2$, ta được $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = 0$, đẳng thức này xảy ra nếu và chỉ nếu OA ⊥ BC. Suy ra điều phải chứng minh.

S21. Ta có $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'})(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC})$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(AB.AC'.\cos\widehat{BAC'} - AB'.AC\cos\widehat{B'AC}) = 0.$$



(vì AB = AC , Ab' = AC' và hai góc BAC' và B'AC bằng nhau). Vậy AI ⊥ CC'. Chứng minh tương tự ta có

$$AJ \perp BB'.$$

Tiếp theo, ta có

$$\overrightarrow{BC'}.\overrightarrow{B'C} = (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'})$$
$$= \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}$$
$$= \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}$$
$$= AC'.AC.\cos\widehat{CAC'} - AB.AB'.\cos\widehat{BAB'}$$
$$= 0 \text{ (vì hai góc BAB' và CAC' bù nhau).}$$

Vậy BC' ⊥ B'C.

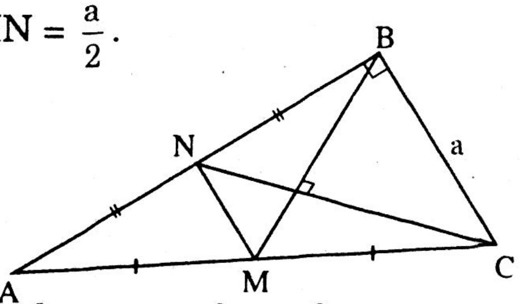
S22. **a)** Ta có

$$AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{AD}^2 =$$
$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD})$$
$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD})\overrightarrow{CA}$$
$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD})$$
$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BD}) = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}.$$

Từ đó suy ra rằng tứ giác có hai đường chéo vuông góc khi và chỉ khi tổng bình phương các cặp cạnh đối bằng nhau.

b) Gọi BM và CN là hai trung tuyến của ΔABC. Vì MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN = \frac{a}{2}$.

Theo kết quả câu trên, điều kiện cần và đủ để tứ giác BCMN có hai đường chéo vuông góc là:



$$MN^2 + BC^2 = MC^2 + BN^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$
$$\Leftrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2.$$

S23. **a)** Từ $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ ta có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, suy ra

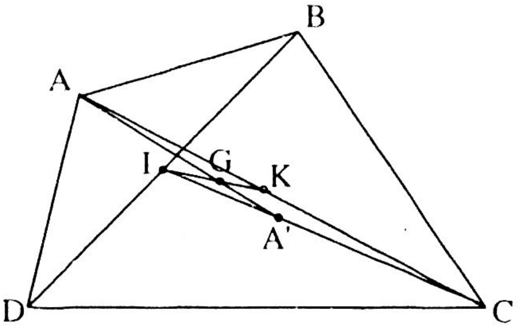
$$\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}.$$

b) Vì G là trọng tâm của tứ giác ABCD nên:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Mặt khác A' là trọng tâm của tam giác BCD nên

$$\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \text{ hay } \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GA'}.$$



Thay vào (1) ta có: $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ hay

$$\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GA'}, \qquad (2)$$

nghĩa là A, A', G thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta cũng có B, B', G thẳng hàng ; C, C', G thẳng hàng ; D, D', G thẳng hàng. Vậy G là điểm chung của bốn đoạn thẳng AA', BB', CC', DD'.

c) Từ (2) ta có điểm G chia các đoạn AA', BB', CC', DD' theo tỉ số k = −3.

d) Mặt khác, từ (2) ta có:

$$-3(\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'}) = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\text{hay } \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}.$$

Vậy G cũng là trọng tâm của tứ giác A'B'C'D'.

S24. Ta có $\overrightarrow{MJ} = \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MJ} + \alpha.\overrightarrow{JA} + \beta.\overrightarrow{JB} + \gamma.\overrightarrow{JC}}{\alpha+\beta+\gamma}$,

$$\overrightarrow{MJ} = \frac{\alpha\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC}\right)}{\alpha+\beta+\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha.\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}}{\alpha+\beta+\gamma} = x.\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC},$$

với $x = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, y = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, z = \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$ và $x + y + z = 1$.

Từ đó, $\overrightarrow{MJ}^2 = \left(x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC}\right)^2 =$

$$= x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2 +$$

$$+ 2xy.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2yz.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 2xz.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$$

Ta lại có:

$$2.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 + MB^2 - \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)^2 = MA^2 + MB^2 - AB^2$$

$$2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MB^2 + MC^2 - BC^2,$$

$$2.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = MA^2 + MC^2 - AC^2.$$

Do vậy,

$$\begin{aligned} MJ^2 &= x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2 + xy\left(MA^2 + MB^2 - AB^2\right) + \\ &\quad + yz\left(MB^2 + MC^2 - BC^2\right) + xz\left(MA^2 + MC^2 - AC^2\right) \\ &= x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2 - \left[xy.AB^2 + yz.BC^2 + xz.AC^2\right] \\ &= \frac{\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{\alpha\beta AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \alpha\gamma CA^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}. \end{aligned}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 1

1. Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau:

(A) được gọi là vectơ-suy biến.

(B) được gọi là vectơ-có phương tùy ý.

(C) được gọi là vectơ-không, kí hiệu là $\vec{0}$.

(D) là vectơ có độ dài không xác định.

2. *Chọn câu sai:* Trong một bài toán Hình học, khi cần chứng minh hai điểm M, N trùng nhau, ta có thể chứng minh

(A) $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$.

(A) Vectơ $\overrightarrow{MN}$ có phương trùng với phương của hai vectơ khác nhau không song song.

(C) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NM}$.

(D) $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.

3. *Chọn câu sai:*

(A) Mỗi vectơ đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

(B) Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

(C) $|\vec{0}| = 0$, $|\overrightarrow{PQ}| = \overline{PQ}$.

(D) $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$.

4. (A) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

(B) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.

(C) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình bình hành.

(D) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình vuông.

5. Câu nào sai trong các câu sau đây ?

(A) Vectơ đối của vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$.

(B) Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

(C) Nếu $\overrightarrow{MN}$ là một vectơ đã cho, thì với điểm O bất kì ta luôn có thể viết: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$.

(D) Hiệu của hai vectơ là tổng của vectơ thứ nhất với vectơ đối của vectơ thứ hai.

6. Điền dấu × vào ô thích hợp

MỆNH ĐỀ	ĐÚNG	SAI
Nếu $\vec{a} // \vec{b}$ và $\vec{b} // \vec{c}$ thì $\vec{a} // \vec{c}$ ($\vec{c} \neq \vec{0}$).		
$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \lvert \vec{a} \rvert = \lvert \vec{b} \rvert$.		
Có hai vectơ sao cho chúng không cùng phương nhưng ngược hướng.		
Điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là hình bình hành là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.		
Cho hình bình hành ABCD, vectơ $\overrightarrow{AB}$ có hai vectơ đối là $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{BA}$.		

7. Cho tam giác đều ABC. Mệnh đề nào sau đây sai ?

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$; (B) $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$;

(C) $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \lvert \overrightarrow{BC} \rvert$; (D) $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\overrightarrow{BC}$.

8. Cho tam giác đều ABC, cạnh a. Mệnh đề nào sau đây đúng:

(A) $\overrightarrow{AC} = a$; (B) $\lvert \overrightarrow{AC} \rvert = \overrightarrow{BC}$;

(C) $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = a$; (D) $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{BC}$.

9. Cho đoạn thẳng AB , I là trung điểm của AB. Khi đó:

(A) $\lvert \overrightarrow{BI} \rvert = \lvert \overrightarrow{IA} \rvert$; (B) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI}$;

(C) $\lvert \overrightarrow{BI} \rvert = 2\lvert \overrightarrow{IA} \rvert$; (D) $\overrightarrow{BI}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng .

10. Chọn câu sai:

(A) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

(B) Nếu M là trung điểm NP thì $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$.

(C) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

(D) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

11. (A) Nếu $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$ thì ba điểm M, N, P thẳng hàng.

(B) Nếu $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$ thì ba điểm M, N, P trùng nhau.

(C) Với bất kì ba điểm M, N, P, ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.

(D) Với bất kì ba điểm M, N, P, ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$ chỉ khi nào ba điểm M, N, P tạo thành một tam giác.

12. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, M là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

(A) $\forall M, \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$; (B) $\exists M, \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$;

(C) $\forall M, \overrightarrow{MA}\neq\overrightarrow{MB}\neq\overrightarrow{MC}$; (D) $\exists M, \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$.

13. Cho vectơ $\vec{a}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

(A) Có vô số vectơ $\vec{u}$ mà $\vec{a}=\vec{u}$;

(B) Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u}=\vec{a}$;

(C) Có duy nhất một $\vec{u}$, mà $\vec{u}=-\vec{a}$;

(D) Không có vectơ $\vec{u}$ nào mà $\vec{u}=\vec{a}$.

14. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

(A) Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ ;

(B) Có ít nhất hai vectơ cùng phương với mọi vectơ ;

(C) Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ ;

(D) Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

15. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 2 cm. Khi đó:

(A) $\overrightarrow{AB}=2$; (B) $|\overrightarrow{BA}|=-2$;

(C) $\overrightarrow{BA}=-2$; (D) $|\overrightarrow{BA}|.\sqrt{2}=|\overrightarrow{AC}|$.

16. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Khi đó:

(A) Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$;

(B) Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là với mọi M, $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;

(C) Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là với mọi M, $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;

(D) Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

17. Cho vectơ $\vec{a}$. Khi đó:

(A) Có duy nhất một vectơ đối của $\vec{a}$;

(B) Có đúng hai vectơ đối của $\vec{a}$;

(C) Có vô số vectơ đối của $\vec{a}$;

(D) Vectơ $\vec{0}$ là một vectơ đối của $\vec{a}$.

18. Cho hình bình hành ABCD với giao điểm hai đường chéo là I. Khi đó:

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$; (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$;

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$; (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

19. Cho bốn điểm M, N, P, Q bất kì. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng ?

(A) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN}$;

(B) $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$;

(C) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$;

(D) $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$.

20. Xét các câu sau:

(1) Nếu $k \geq 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

(2) Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

(3) Độ dài vectơ $k\vec{a}$ bằng k lần độ dài vectơ $\vec{a}$.

Trong các câu trên:

(A) Có ít nhất một câu sai.

(B) Chỉ có câu (1) đúng.

(C) Chỉ có câu (2) đúng.

(D) Chỉ có câu (3) đúng.

21. Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, h, ta có:

(i) $k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}$

(ii) $(k + h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$

(iii) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

(iv) $1.\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$; $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$.

Trong các câu trên:

(A) Không có câu nào sai.

(B) Có ít nhất một câu sai.

(C) Chỉ có hai câu đúng.

(D) Chỉ có câu (i) đúng.

22. (1) Để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng, điều kiện cần và đủ là tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

(2) Để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng, điều kiện cần và đủ là tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AB} = -k\overrightarrow{BC}$.

(3) Để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng, điều kiện cần và đủ là tồn tại số k sao cho $k\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.

Trong các câu trên:

(A) Câu (2) là câu sai.

(B) Không có câu nào sai.

(C) Chỉ có câu (3) sai.

(D) Chỉ có câu (1) đúng.

23. (1) Điều kiện cần và đủ để C là trung điểm AB là $\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{AC}$.

(2) Điều kiện cần và đủ để C là trung điểm AB là $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$.

(3) Điều kiện cần và đủ để M là trung điểm PQ là $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PM}$.

Trong các câu trên:

(A) Câu (1) là câu sai.

(B) Không có câu nào sai.

(C) Chỉ có câu (3) sai.

(D) Chỉ có hai câu (1) và (3) là các câu đúng.

24. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó:

(1) Mọi vectơ $\vec{x}$ đều có thể biểu thị một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

(2) Với mọi vectơ $\vec{x}$, có duy nhất cặp số m và n sao cho

$$-\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}.$$

Trong hai câu trên:

(A) Câu (1) và câu (2) cùng đúng.

(B) Không có câu nào sai.

(C) Chỉ có câu (1) đúng.

(D) Chỉ có hai câu (2) đúng.

25. Cho hình chữ nhật ABCD, không phải hình vuông, với I là giao điểm hai đường chéo. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

(A) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BD}|$;

(B) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AC}|$;

(C) $|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}| = |\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}|$;

(D) $|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}|$.

26. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thoả mãn điều kiện

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}.$$

(A) M là đỉnh thứ tư hình bình hành ABCM ;

(B) Không có M nào thỏa mãn ;

(C) M tùy ý ;

(D) M là trung điểm AB.

27. Cho hình bình hành ABCD. Tính tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

(A) $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; (B) $\overrightarrow{AC}$; (C) $2\overrightarrow{AC}$; (D) $\vec{0}$.

28. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm ở trên cạnh AB sao cho MB = 3MA. Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

(A) $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$; (B) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$;

(C) $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AC}$; (D) $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

29. Cho tam giác đều ABC cạnh 1. Tính $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}|$.

(A) $3\sqrt{10}$; (B) $3\sqrt{2} + \sqrt{10}$; (C) $\sqrt{3}$; (D) 10.

30. Cho tam giác ABC. Gọi N là điểm trên cạnh AC sao cho NC = 2NA. Biểu diễn $\overline{AN}$ theo $\overline{AC}$.

(A) $\frac{2}{3}\overline{AC}$; (B) $\overline{AC}$; (C) $\frac{1}{3}\overline{AC}$; (D) $2\overline{AC}$.

31. (A) Nếu $\alpha = 0^0$ thì:

$\sin 0^0 = 0$; $\cos 0^0 = 1$; $\text{tg}0^0 = 1$; $\text{cotg}0^0$ không xác định.

(B) Nếu $\alpha = 90^0$ thì:

$\sin 90^0 = 0$; $\cos 90^0 = 1$; $\text{tg}90^0$ không xác định ; $\text{cotg}90^0 = 0$.

(C) Nếu α là góc tù hoặc bẹt ($90^0 < \alpha \le 180^0$) thì

$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$; $\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$;

$\text{tg}\alpha = -\tan(180^0 - \alpha)$; $\text{cotg}\alpha = -\text{cotg}(180^0 - \alpha)$.

(D) Tất cả các câu trên đều sai.

32. Giá trị của các biểu thức

$$(2\sin 30^0 + \cos 135^0 - 3\text{tg}150^0)(\cos 180^0 - \cot 60^0) \text{ là}$$

(A) $1 - \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

33. Tính giá trị của các biểu thức:

$B = \sin^2 90^0 + \cos^2 120^0 + \cos^2 0^0 - \text{tg}^2 60^0 + \text{cotg}^2 135^0$.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) Một kết quả khác.

34. Điền dấu × vào ô (đúng, sai) thích hợp (nếu tất cả các số liệu trong hàng đều đúng).

CÂU	Góc	90^0	120^0	35^0	150^0	180^0	ĐÚNG	SAI
A	sin	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
B	cos	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	1		
C	tg	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0		
D	cotg	0	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ		

Trong bảng trên, kxđ là viết tắt của nhóm từ *không xác định.*

35. Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ-không thì góc giữa hai vectơ đó là

(A) 45^0 (B) 60^0 (C) 90^0 (D) một giá trị tùy ý.

36. *Tích vô hướng* của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}\,.\,\vec{b}$, và được xác định bởi công thức:

(A) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$.

(B) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\mathrm{tg}(\vec{a}, \vec{b})$.

(C) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{b}, \vec{a})$.

(D) Tất cả các câu trên đều sai.

37. (I) Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|^2$.

(II) Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì ta có *công thức hình chiếu*: $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{a}\,.\,\vec{b'}$, trong đó $\vec{b'}$ là hình chiếu của vectơ $\vec{b}$ trên đường thẳng chứa vectơ $\vec{a}$.

Trong hai câu trên:

(A) Chỉ có câu (I) đúng. (B) Chỉ có câu (II) đúng.

(C) Cả hai câu đều đúng. (D) Cả hai câu đều sai.

38. Cho vectơ $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ cố định, k là một số không đổi. Khi đó, tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} = k$ là

(A) Đường thẳng song song với OB.

(B) Đường tròn tâm O, bán kính $\frac{1}{2}k$.

(C) Đường thẳng vuông góc với AB tại H, với H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng OB.

(D) Tất cả các câu trên đều sai.

39. Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và mọi số thực k, ta có:

(I) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$;

(II) $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$;

(III) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$.

Trong các câu trên:

(A) Chỉ có hai câu (I) và (III) đúng.

(B) Tất cả 3 câu đều sai.

(C) Có ít nhất một câu đúng.

(D) Chỉ có hai câu (II) và (III) đúng.

40. Xét các công thức sau:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2.$$

(A) Để chứng minh chúng, ta chỉ cần sử dụng các tính chất của phép nhân đại số thông thường.

(B) Để chứng minh chúng, ta phải sử dụng các tính chất của tích vô hướng.

(C) Để chứng minh chúng, ta chỉ cần sử dụng các tính chất của tổng và hiệu vectơ.

(D) Các công thức trên hiển nhiên theo tính chất khai triển một biểu thứcbậc hai thông thường.

41. Xét các công thức:

a) $\sin^2x + \cos^2x = 1$;

b) $\text{tgx} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\text{cotgx} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$;

c) $1 + \text{tg}^2x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \text{cotg}^2x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

d) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x(1 + \text{tg}x)} - \dfrac{\cos^2 x}{\sin x(1 + \cot gx)} = \sin x + \cos x$;

e) $\left(\text{tg}x + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}\right)\left(\cot gx + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}\right) = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

(trong điều kiện tgx và cotgx được xác định cho các câu b, c, d, e).

(A) Các công thức trên đều đúng.

(B) Trong các công thức trên, chỉ có e) và d) sai.

(C) Trong các công thức trên, chỉ có d) sai.

(D) Trong các công thức trên, chỉ có e) sai.

42. Cho tam giác ABC vuông ở A và góc B = 30^0. Tính giá trị của:

$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \tan\dfrac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})}{2}$.

(A) $\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(C) $\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$ (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

43. Cho tam giác ABC vuông ở A và góc B = 30^0. Tính giá trị của:

$\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

(A) $\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

(C) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}$ (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

44. Nếu điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k ≠ 1 thì với mọi điểm O, tá sẽ có:

(A) $\overrightarrow{MO} = k\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$

(C) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{AB}}{1+k}$ (D) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}$.

45. Cho tam giác đều ABC cạnh 1. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

(A) $-\frac{3}{8}$ (B) $-\frac{1}{6}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$.

46. Cho AB = $\sqrt{2}$, AC = $\sqrt{6}$ và A, B, C thẳng hàng. Khi đó:

(A) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\sqrt{6}$ (B) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \sqrt{6}$

(C) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \sqrt{3}$ (D) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \pm\sqrt{6}$.

47. Cho hình vuông ABCD cạnh 2. Gọi M là trung điểm AB. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DB}$.

(A) 1 (B) $8-\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $-\frac{1}{8}$.

48. Cho tam giác đều ABC cạnh 1, tâm O. Tính $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

(A) $-\frac{1}{6}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$.

49. Cho đoạn thẳng AB = 2 ; I là trung điểm AB. M là điểm trên đường thẳng AB kéo dài về phía A sao cho MI = 3. Tính $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

(A) 8 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) 2.

50. Cho tam giác cân ABC ; AB = AC = 1, góc BAC = 120^0. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$.

(A) $-\frac{3}{8}$ (B) $-\frac{1}{6}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$.

51. Nếu A, B là hai điểm phân biệt và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ thì

(A) M trùng B. (B) M trùng A.

(C) M trùng H, với H là trung điểm AB.

(D) Các câu trên đều sai.

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. A	2. D	3. C	4. A	5. C	6. Đ S S Đ Đ	7. A	8. C
9. A	10. B	11. C	12. C	13. A	14. A	15. D	16. A
17. C	18. C	19. C	20. A	21. A	22. B	23. D	24. D
25. A	26. B	27. C	28. C	29. C	30. C	31. C	32. A
33. B	34. A, C, D: đúng, B: sai			35. D	36. D	37. C	38. C
39. C	40. B	41. C	42. C	43. B	44. B	45. D	46. D
47. C	48. A	49. A	50. C	51. B			

Chương 2

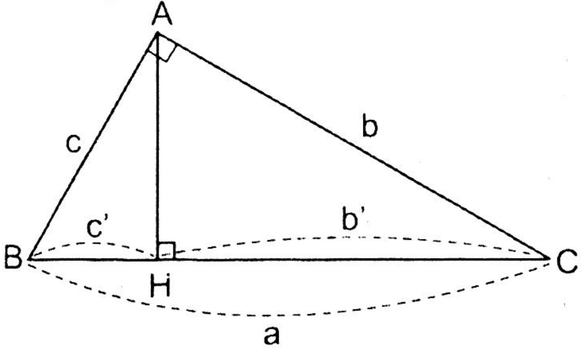
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN

---

§ 1. CÁC HỆ THỨC TRONG TAM GIÁC

1.1. Tóm tắt kiến thức

- *Hệ thức lượng trong tam giác vuông*



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b = \sqrt{a.b'}\ ;\ c = \sqrt{a.c'}$$

$$h^2 = c'.b'\ ;\ h.a = b.c$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

- *Định lí cosin trong tam giác*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\ ;\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

- *Định lí sin trong tam giác*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a = 2R.\sin A,\ b = 2R.\sin B,\ c = 2R.\sin C.$$

- *Công thức trung tuyến*

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4};\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4};\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4},$$

trong đó, m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài ba trung tuyến xuất phát từ A, B, C và a, b, c là độ dài ba cạnh đối tương ứng của ba đỉnh A, B, C trong tam giác ABC.

- *Công thức tính diện tích tam giác*

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}bc.\sin A$$

$$S = \frac{abc}{4R} \; ; \; S = p.r$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \; .$$

(p là nửa chu vi, h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C ; công thức sau cùng thường được gọi là công thức Hêrông.)

- *Giải tam giác*

Giải tam giác là tìm cách xác định các yếu tố còn lại của tam giác (các góc và các cạnh còn lại) theo ba yếu tố đã biết. Trong các yếu tố đã biết, có ít nhất một yếu tố về cạnh.

- *Giải tam giác khi đã biết ba cạnh*

Khi biết ba cạnh a, b, c, ta sử dụng định lí sin để tính các góc. Chẳng hạn, để tính góc A, ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Góc B cũng được suy ra bằng cách tương tự, hoặc sau khi đã tính được góc A, có thể dùng công thức nhận được từ định lí sin: $a\sin B = b\sin A \Rightarrow \sin B = \frac{b\sin A}{a}$.

- *Giải tam giác khi đã biết hai cạnh (b, c) và góc (A) xen giữa chúng:*

Dùng định lí cosin để tính cạnh a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \; .$$

Để tính góc B, có thể sử dụng:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ hoặc } \sin B = \frac{b\sin A}{a}.$$

- *Giải tam giác khi đã biết một cạnh và hai góc*

Khi biết một cạnh và hai góc, ta dùng định lí sin để tính hai cạnh còn lại.

- *Giải tam giác khi đã biết hai cạnh (b, c) và góc (B) không xen giữa:* Khi biết hai cạnh và một góc không xen giữa, ta dùng định lí sin để tính một trong hai góc kia, và cũng dùng định lí sin để tính cạnh còn lại (hoặc dùng định lí cosin sau khi đã tính góc).

1.2. Một số dạng toán

Bài 1. Giải tam giác ABC, biết:

a) $c = 14$, $A = 60^\circ$, $B = 40^\circ$ b) $b = 4{,}5$; $A = 30^\circ$, $C = 75^\circ$

c) $c = 35$, $A = 40^\circ$, $C = 120^\circ$ d) $a = 137{,}5$; $B = 83^\circ$, $C = 57^\circ$.

Giải

a) Ta có $C = 180^0 - (A + B) = 180^0 - (60^0 + 40^0) = 80^0$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\text{, suy ra}$$

$$b = \frac{c.\sin B}{\sin C} = \frac{14.\sin 40^0}{\sin 80^0} \approx 9{,}1,$$

$$a = \frac{c.\sin A}{\sin C} = \frac{14.\sin 60^0}{\sin 80^0} \approx 12{,}3.$$

b) $B = 75^0$, $a = \dfrac{b.\sin A}{\sin B} = \dfrac{4{,}5.\sin 30^0}{\sin 75^0} \approx 2{,}3$.

$c = b = 4{,}5$.

c) $B = 20^0$. $a = \dfrac{c.\sin A}{\sin C} = \dfrac{35.\sin 40^0}{\sin 120^0} \approx 26{,}0$,

$$b = \frac{c.\sin B}{\sin C} = = \frac{35.\sin 20^0}{\sin 120^0} \approx 13{,}8.$$

d) $A = 40^\circ$. $b = \dfrac{a.\sin B}{\sin A} = = \dfrac{137{,}5.\sin 83^0}{\sin 40^0} \approx 212{,}3$,

$$c = \frac{a.\sin C}{\sin A} = = \frac{137{,}5.\sin 57^0}{\sin 40^0} \approx 179{,}4.$$

Bài 2. Xét tam giác AOB cân tại O. Vẽ đường cao OH và AK, đặt OA = a và $\widehat{AOH} = \alpha$.

a) Tính các cạnh của ΔAKB theo a và α.

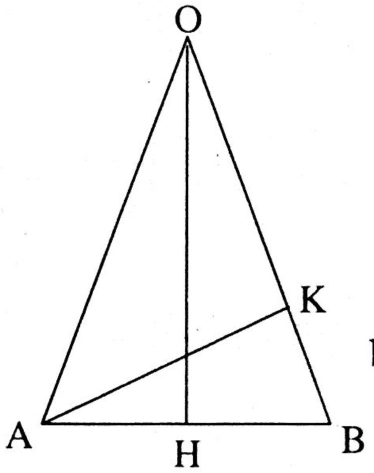
b) Tính các cạnh của các tam giác OKA và AKB theo a và 2α. Từ đó, hãy suy ra các công thức sau:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \qquad (2)$$

Giải

a) Ta có $\widehat{KAB} = \widehat{AOH} = \alpha$. ΔOAH cho: $\sin\alpha = \dfrac{AH}{AO}$ suy ra



$$AH = a.\sin\alpha,\ AB = 2a.\sin\alpha.$$

ΔAKB cho: $\sin\alpha = \dfrac{BK}{AB}$. Suy ra

$BK = AB\sin\alpha = 2a.\sin^2\alpha$ và $\cos\alpha = \dfrac{AK}{AB}$, do đó:

$$AK = 2a.\sin\alpha.\cos\alpha.$$

b) Ta có $\widehat{AOB} = 2\alpha$. ΔAOK cho:

$\sin 2\alpha = \dfrac{AK}{OA}$, suy ra

$AK = a\sin 2\alpha$, và $\cos 2\alpha = \dfrac{OK}{OA}$,

suy ra $OK = a\cos 2\alpha$.

Với ΔAKB, ta đã có $AK = a.\sin 2\alpha$, còn

$$BK = OB - OK = a - a\cos 2\alpha = a(1 - \cos 2\alpha).$$

Theo định lí Pi-ta-go ta có

$$AB^2 = AK^2 + BK^2 =$$

$$= a^2\sin^2 2\alpha + a^2(1 - \cos 2\alpha)^2 = a^2[\sin^2 2\alpha + 1 - 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha]$$

$$= 2a^2(1 - \cos^2 2\alpha) \text{ (vì } \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1\text{)}.$$

Cuối cùng, khi so sánh các giá trị đã tính của AK ta có:

$a\sin 2\alpha = 2a\sin\alpha\cos\alpha$ hay $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

như vậy ta được công thức $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

So sánh các trị số của BK, ta được: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, như vậy ta được công thức $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

Nhận xét. Các công thức trên sẽ được học và chứng minh bằng các tính chất *lượng giác*. Tuy nhiên, ở đây, chúng ta chứng minh bằng phương pháp hình học để sử dụng trong các bài toán khác, chẳng hạn, bài 5 dưới đây.

Bài 3. Chứng minh $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$, với r, r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn nội tiếp và ba đường tròn bàng tiếp.

Giải

Từ công thức diện tích ta có

$S = pr = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$, suy ra

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{S} \text{ và } \frac{1}{r_a} = \frac{(p-a)}{S};\ \frac{1}{r_b} = \frac{(p-b)}{S};\ \frac{1}{r_c} = \frac{(p-c)}{S}.$$

Cộng các đẳng thức trên ta được $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính *R*. Gọi D, E, F là chân đường cao hạ từ A, B, C. Chứng minh rằng:

a) $OA \perp EF$, $OB \perp FD$, $OC \perp DE$.

b) Diện tích tam giác ABC bằng tích số của *R* với chu vi tam giác DEF.

c) Trong tam giác lấy điểm P sao cho các tam giác ABP, BCP, ACP có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng P là trọng tâm của tam giác.

Hướng dẫn

a) Chứng minh EF song song với tiếp tuyến của đường tròn tại A. Hai trường hợp kia tương tự.

b) Trước hết, ta có kết quả sau đây: Xét tứ giác ABCD, giả sử ϕ là góc giữa hai đường chéo AC và BD, khi đó:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD.\sin\phi. \qquad (*)$$

Đặc biệt, khi $AC \perp BD$, ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD$. Để chứng minh (*), hãy gọi O là giao điểm AC và BD, để ý rằng hai góc bù nhau thì có sin bằng nhau, sử dụng công thức $S_{AOB} = \frac{1}{2} OA.OB.\sin\phi$, và các hệ thức tương tự.

Áp dụng kết quả (*) cho các tứ giác OEAF, OFBD, ODBC ta suy ra điều phải chứng minh.

c) Hai tam giác ABP, ACP có chung đáy AP và có diện tích bằng nhau nên hai đường cao BM, CN bằng nhau, suy ra hai tam giác BMI, CNI bằng nhau, do đó I là trung điểm BC.

Nhận xét. Trong câu (b), ta đã sử dụng công thức diện tích của 4 tam giác AOB, AOD, COB, COD để đi đến công thức

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\phi .$$

Kết quả này rất thường được sử dụng trong nhiều bài toán.

Bài 5. Chứng minh hai công thức về đường phân giác sau đây:

a) $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$, b) $l_a = \dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$.

Giải

a) Chứng minh $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

Cách 1. Gọi AD là phân giác góc A của tam giác ABC, theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$ hay

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}b.l_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}c.l_a\sin\frac{A}{2}.$$

Do $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ nên đẳng thức trên trở thành

$$\frac{1}{2}2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(b+c)l_a\sin\frac{A}{2}.$$

Suy ra $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

Cách 2. Áp dụng Định lí hàm số sin cho tam giác ADB :

$$\frac{l_a}{\sin B} = \frac{DB}{\sin\frac{A}{2}}.$$

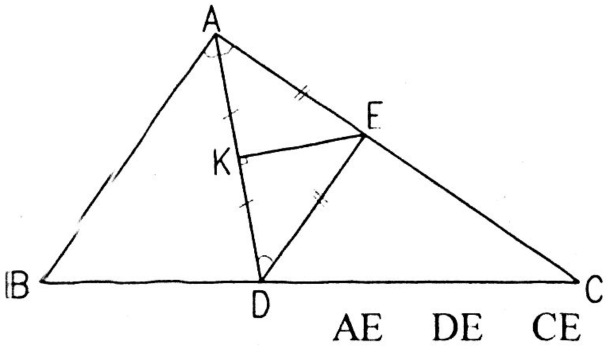
Vì AD là phân giác nên $\frac{DC}{DB}=\frac{b}{c}$. Suy ra

$$\frac{DC+DB}{DB}=\frac{b+c}{c} \text{ hay } DB=\frac{ac}{b+c}.$$

Vậy

$$l_a=\frac{DB.\sin B}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{ac\sin B}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{c.2R\sin A.\sin B}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{c.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}(2R\sin B)}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{(b+c)}.$$



Cách 3. Kẻ DE song song với AB cắt AC tại E. Khi ấy tam giác AED cân vì có góc ADE bằng góc DAE (cùng bằng DAB). Suy ra AE = DE. Áp dụng định lí Ta-lét ta có

$$\frac{AE}{AB}=\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{AC}=\frac{AC-AE}{AC}=1-\frac{AE}{AC}$$

Suy ra $\frac{AE}{c}+\frac{AE}{b}=1$ hay $AE=\frac{bc}{b+c}$.

Gọi K là trung điểm AD. Do tam giác ADE cân nên

$$l_a=AD=2AK=2AE.\cos\frac{A}{2}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

b) Chứng minh $l_a=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$.

Từ định lí hàm số cos ta có $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Suy ra

$$1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}=\frac{2p(p-a)}{bc}.$$

Do $1+\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$ (sử dụng công thức $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ở bài 22)

nên $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$. Vậy ta có

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}.$$

Bài 6. Cho tam giác có độ dài ba cạnh là a, a + d, a + 2d và có diện tích S. Tính các cạnh và các góc của tam giác này theo d và S.

Tính ra số cụ thể khi d = 1, S = 6.

Hướng dẫn.

Đặt b = a + d, c = a + 2d = b + d. Theo công thức Heron ta có $S^2 = (3b^2/4)(b^2/4 - d^2)$. Đây là phương trình bậc hai theo b^2. Phương trình này phải có nghiệm dương, do đó

$$b^2 = 2(d^2 + \sqrt{d^4 + 4S^2/3}).$$

Từ đó suy ra các cạnh theo a và S.

Ta có sinA = 2S/bc, sinB = 2S/ac. Vì c là cạnh dài nhất nên hai góc A (đối diện cạnh a) và B (đối diện cạnh b) phải là các góc nhọn. Cuối cùng, $C = 180^\circ - A - B$.

Khi d = 1, S = 6, tính được b = 4. Suy ra a = 3, c = 5, $A = \alpha$, với α là góc có sin bằng 3/5. Suy ra $C = 90^\circ$, $B = 90^\circ - \alpha$.

- Trong hai bài toán sau đây, ta sử dụng công thức trung tuyến.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: Điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$.

Giải

Áp dụng công thức tính trung tuyến trong tam giác ta được:

$$m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2 \Leftrightarrow \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 5\left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right).$$

Biến đổi và rút gọn được $a^2 = b^2 + c^2$, đó chính là điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông ở A.

Bài 8. Cho ABC là một tam giác sao cho $\widehat{ACB} = 2\widehat{ABC}$. Gọi D là một điểm trên cạnh BC sao cho CD = 2BD. Kéo dài đoạn AD và lấy E sao cho AD = DE. Chứng minh rằng $\widehat{ECB} + 180^0 = 2\widehat{EBC}$.

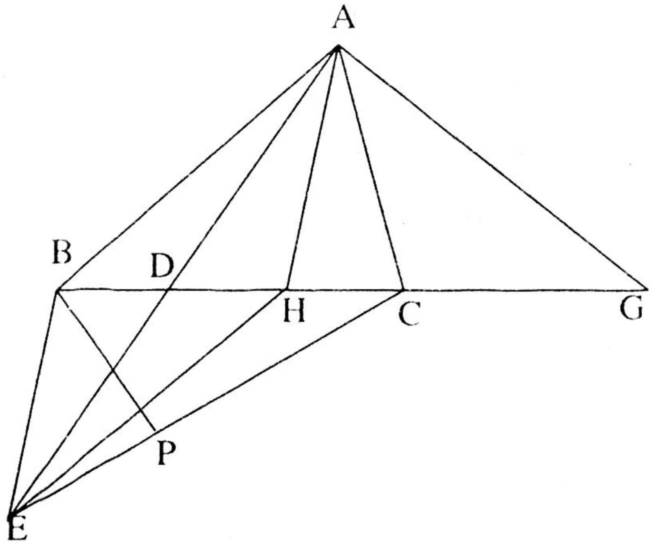
Giải

Gọi H là trung điểm của CD, dễ thấy ABEH là hình bình hành. Trên BC kéo dài, lấy điểm G sao cho CG = CA. Đặt

$$BD = DH = HC = a/3,\ \ CA = b,\ \ AB = c,$$

$$BE = AH = x,\ AD = DE = y\ \text{ và } CE = z.$$

Vì $2\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{CAG} + \widehat{CGA} = 2\widehat{CGA}$, ta có các tam giác ABG và CAG đồng dạng. Vậy AB/BG = CA/AG, hay $c^2 = b(a + b)$. (1)



Áp dụng công thức trung tuyến vào các tam giác ACD, ABH và CDE, ta được

$$b^2 + y^2 = 2x^2 + \frac{2a^2}{9}, \quad (2)$$

$$x^2 + c^2 = 2y^2 + \frac{2a^2}{9}, \quad (3)$$

$$y^2 + z^2 = 2c^2 + \frac{2a^2}{9}, \quad (4)$$

Khử y từ (2) và (3) ta có

$$x^2 + c^2 + 2b^2 = 4x^2 + \frac{2a^2}{3}.$$

Kết hợp với (1), ta có $$x^2 = (b + \frac{2a}{3})(b - \frac{a}{3}). \quad (5)$$

Khử y từ (3) và (4) ta nhận được:

$$x^2 + c^2 + 2z^2 = 4c^2 + \frac{2a^2}{3}.$$

Kết hợp kết quả này với (1) và (5), ta có z = b + 2a/3. Từ đây và (5), ta suy ra $x^2 = z(z - a)$ hay $BE^2 = CE(CE - BC) = CE.EP$, trong đó P là điểm trên CE sao cho CP = BC. Như thế, BE/CE = EP/BE. Vậy các tam giác BEP và CEB đồng dạng, vì $\widehat{BEP} = \widehat{CEB}$. Suy ra

$$\widehat{ECB} = \widehat{EBP} = \widehat{EBC} - \frac{1}{2}(180^0 - \widehat{ECB}).$$

Cuối cùng, ta được $\widehat{ECB} + 180^0 = 2\widehat{EBC}$.

P1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$.

b) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$.

c) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$.

P2. Cho tam giác ABC vuông ở A. Phân giác góc B cắt AC tại E. Đặt $\widehat{ABE} = \alpha$. Kéo dài BA, trên tia BA lấy F sao cho AF = BC = a. Gọi D là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật FACD, ta có DF = AC = b. Đặt AB = c. Chứng minh các công thức

$$\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

$$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \qquad (2)$$

P3. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $a = b.\cos C + c.\cos B$;

b) $b^2 - c^2 = a(b.\cos C - c.\cos B)$;

c) $(b^2 - c^2)\cos A = a(c.\cos C - b.\cos B)$.

P4. Một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp R và ba cạnh a, b, c thoả mãn $R(b + c) = a\sqrt{bc}$. Tính các góc của tam giác.

P5. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

P6. Giải tam giác ABC biết :

a) b = 4,5, A = 30°, C = 75°

b) a = 137,5, B = 83°, C = 57°.

P7. Từ đỉnh C của một ngọn đồi, người ta dựng một cái tháp thẳng đứng có đỉnh B, cao 100m. Một người quan sát đứng ở mặt đất, nhìn thấy BC dưới một góc nhìn là 30°. Cho biết góc nhọn mà AB hợp với mặt đất là 60°. Xác định chiều cao h của ngọn đồi.

P8. Cho hai đường thẳng x'Ox, y'Oy. Một điểm A di động trên x'x, B di động trên y'y sao cho AB có độ dài không đổi.

a) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

b) Đường vuông góc với x'x kẻ từ A và đường vuông góc với y'y kẻ từ B cắt nhau tại C. Tìm quỹ tích điểm C.

c) Hạ AA' vuông góc với y'y, BB' vuông góc với x'x. Chứng minh rằng tứ giác AA'BB' nội tiếp trong một đường tròn có bán kính không đổi. Suy ra A'B' không đổi và tìm quỹ tích tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác OA'B'.

P9. Cho tam giác ABC có a = 7, b = 8, c = 6. Tính h_a và m_a.

P10. Cho tam giác ABC có cạnh BC bé nhất đến mức có thể được, miễn là nó phải có diện tích bằng k không đổi và góc A = θ cho trước. Tính các cạnh AB và AC.

P11. Tính diện tích một tam giác, biết hai cạnh a, b và độ dài l của phân giác góc giữa hai cạnh đó.

P12. Xét tất cả các tam giác ABC có đáy AB cố định, góc C không tù và độ dài tất cả các đường cao kẻ từ C đều bằng hằng số h. Trong các tam giác này thì tam giác nào có tích độ dài ba đường cao lớn nhất?

P13. Gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với các góc ABC của tam giác ABC. Gọi S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh:

a) $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

b) $S = \sqrt{rr_ar_br_c} = \dfrac{ar_br_c}{r_b + r_c}$.

P14. Cho tam giác ABC có cạnh BC = 1. Đặt

$$sA = \sin(A/2),\ cA = \cos(A/2),\ sB = \sin(B/2),\ cB = \cos(B/2).$$

Giả sử ta có $sA^{23}cB^{48} = sB^{23}cA^{48}$. Tính độ dài cạnh AC.

P15. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1. Gọi AH là đường cao, M là trung điểm BC và K là giao điểm của phân giác góc A với đoạn thẳng

BC. Giả sử [AHM] = 1/4, [AKM] = $1 - \sqrt{3}/2$. Tính các góc của tam giác (ở đây, [.] là kí hiệu diện tích).

P16. Chứng minh đẳng thức:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr,$$

với a, b, c, r, R, p lần lượt là độ dài 3 cạnh, bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp và nửa chu vi của một tam giác.

P17. Chứng minh rằng trong một tam giác bất kì, bình phương khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp đến trọng tâm của tam giác đó luôn luôn bằng $\frac{1}{9}\left(p^2 + 5r^2 - 16Rr\right)$.

§ 2. PHƯƠNG TÍCH, TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG, TÂM ĐẲNG PHƯƠNG

2.1. Tóm tắt kiến thức

- Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm M cố định, MO = d. Một đường thẳng di động (m) đi qua M, cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Khi đó, tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ là một số không đổi, và
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2.$$
Tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ được gọi là *phương tích của điểm* M *đối với đường tròn* (O), kí hiệu $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$.
- *Để tính phương tích* $\mathscr{P}_{M/(O)}$, ta cần nhớ:

  a) Nếu có cát tuyến MAB thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

  b) Nếu biết MO = d và bán kính đường tròn là R thì
  $$\mathscr{P}_{M/(O)} = d^2 - R^2.$$

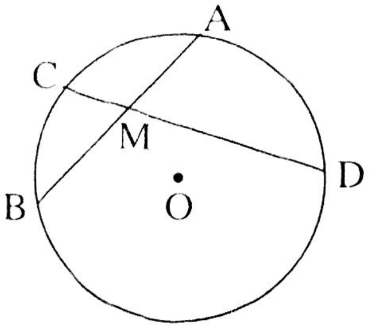
  c) Nếu M ở ngoài đường tròn, biết độ dài tiếp tuyến MT thì
  $$\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2.$$

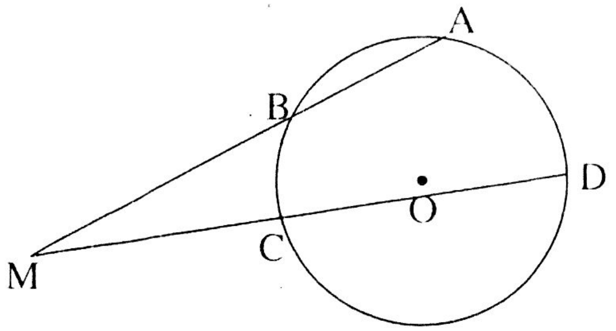
  d) Ta quy ước: $\mathscr{P}_{M/(O)} = 0$ khi và chỉ khi M nằm trên (O).

  e) Nếu M ở ngoài đường tròn (d > R), phương tích là một số dương: $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA.MB$.

  f) Nếu M ở trong đường tròn (d < R), phương tích là một số âm: $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MA.MB$.

- *Điều kiện bốn điểm cùng thuộc một đường tròn*





Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại một điểm M. Khi đó, bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

- *Trục đẳng phương của hai đường tròn*

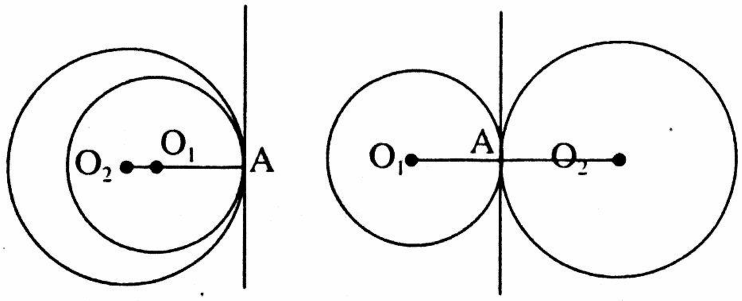
Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn là một đường thẳng vuông góc với đường nối tâm, ta gọi đường thẳng này là *trục đẳng phương* của hai đường tròn đó.

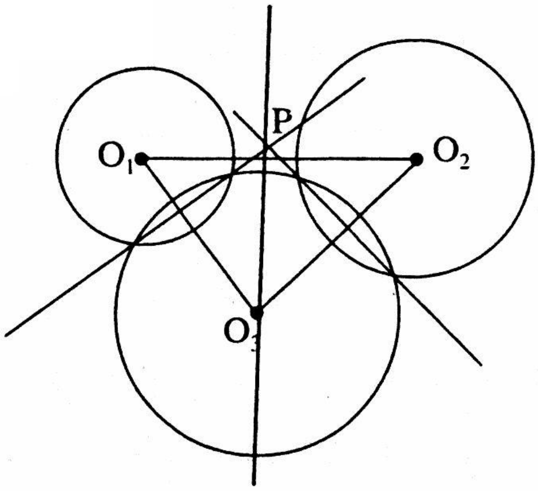
- *Cách dựng trục đẳng phương*

* Nếu hai đường tròn đồng tâm, có bán kính khác nhau thì với mọi điểm M, $OM^2 - R^2 \neq OM^2 - r^2$, do đó, tập hợp các điểm M có cùng phương tích với hai đường tròn là tập rỗng. Điều này có nghĩa hai đường tròn đồng tâm, có bán kính khác nhau thì không có trục đẳng phương.

* Nếu hai đường tròn giao nhau tại hai điểm (A và B), trục đẳng phương của hai đường tròn này chính là đường thẳng nối hai giao điểm đó, đường này vuông góc với đường thẳng nối hai tâm. (Do A, B thuộc hai đường tròn nên phương tích của hai điểm A và B đối với hai đường tròn đều bằng 0.)

* Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau (tại A), trục đẳng phương của chúng là đường thẳng đi qua tiếp điểm và vuông góc với đường thẳng nối hai tâm, đó chính là tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại điểm A. (Do A thuộc hai đường tròn nên phương tích của A đối với hai đường tròn cùng bằng 0.)





* Nếu hai đường tròn (O_1) và (O_2) không giao nhau, ta có thể xác định trục đẳng phương của chúng bằng cách vẽ một đường tròn thứ ba là (O_3) giao với cả hai đường tròn đó. Gọi P là giao điểm của trục đẳng phương (O_1) và (O_3) với trục đẳng phương (O_2) và (O_3). Khi đó, trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) là đường thẳng qua P và vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của (O_1) và (O_2).

- *Tâm đẳng phương*

Trong trường hợp có 3 đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) có các tâm tương ứng là O_1 , O_2 và O_3 không thẳng hàng, ta cũng dễ thấy 3 trục đẳng phương của 3 cặp đường tròn đồng quy tại một điểm (như hình trên, đó chính là điểm P). Ta gọi điểm này là *tâm đẳng phương* của 3 đường tròn. Ta thường sử dụng *tâm đẳng phương* để chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

2.2. Một số dạng toán

Bài 9. Cho đường tròn tâm O bán kính R và k là một số thực. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\mathscr{P}_{M/(O)} = k$.

Giải

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = k \Leftrightarrow MO^2 - R^2 = k \Leftrightarrow MO^2 = R^2 + k.$$

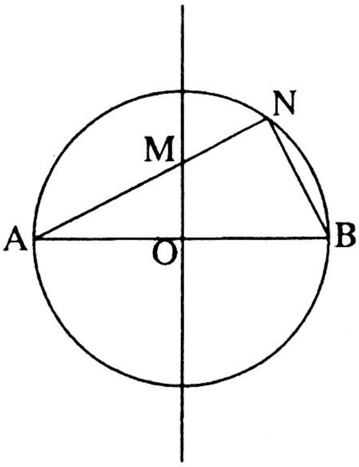
Nếu $R^2 + k > 0$ thì tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính bằng $\sqrt{R^2 + k}$.

Nếu $R^2 + k = 0$ thì tập hợp điểm M là một điểm O.

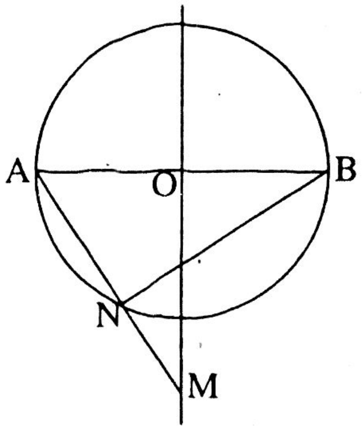
Nếu $R^2 + k < 0$ thì tập hợp điểm M là tập rỗng.

Bài 10. Cho (d) là đường trung trực của đoạn AB và điểm M di động trên (d). Lấy điểm N trên tia AM sao cho $AM.AN = \frac{1}{2}AB^2$. Tìm quỹ tích điểm N.

Giải



Gọi O là trung điểm AB. Từ giả thiết ta suy ra AM.AN = AO.AB. Vậy M, N, B, O cùng thuộc một đường tròn. Mà góc MOB vuông, nên góc MNB cũng vuông. Suy ra N thuộc đường tròn đường kính AB cố định. Khi M trùng O thì N trùng B, khi M chạy xa vô tận trên đường trung trực (d), N tiến tới gần A, nhưng không trùng với điểm A.



Đảo lại, lấy N tuỳ ý trên đường tròn đường kính AB, nhưng khác với điểm A. Gọi M là giao điểm của đường thẳng AN với (d). Ta có BN ⊥ AM và MO ⊥ AB nên suy ra NMBO là tứ giác nội tiếp. Từ đó,

$$AM.AN = AO.AB = \frac{1}{2}AB^2.$$

Vậy N là điểm thoả mãn điều kiện đề bài.

Tóm lại, quỹ tích các điểm N là đường tròn tâm O, đường kính AB, ngoại trừ điểm A.

Bài 11. Cho A, B, C và D là bốn điểm phân biệt trên một đường thẳng và được sắp theo thứ tự đó.

Các đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại các điểm X và Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là một điểm trên đường thẳng XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại C và M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại B và N.

a) Xét trường hợp $P \neq X$, $P \neq Y$.

a_1) Xét vị trí của hai đường thẳng XY và AD.

a_2) Chứng minh $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PN}.\overrightarrow{PB}$.

a_3) Giả sử $AM \cap XY = \{K\}$. Chứng minh $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PK}.\overrightarrow{PZ}$.

a_4) Giả sử $DN \cap XY = \{K'\}$. Chứng minh $\overrightarrow{PN}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PK'}.\overrightarrow{PZ}$.

a_5) Chứng minh rằng các đường thẳng AM, DN và XY đồng quy.

b) Xét trường hợp P trùng X hoặc P trùng Y. Kết luận (a_5) còn đúng hay không?

Giải

a) Xét trường hợp $P \neq X$, $P \neq Y$.

a_1) XY ⊥ AD vì XY là trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính AC và BD.

a_2) Do XY là trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính AC và BD nên P có cùng phương tích với hai đường tròn này, nghĩa là

$$\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PN}.\overrightarrow{PB}. \tag{1}$$

Đồng thời, XY ⊥ AD kéo theo góc PZD = 90^0.

a_3) Vì M nằm trên đường tròn đường kính AC nên các góc AMC và KMC vuông.

Vậy $\widehat{KMC} = \widehat{KZC} = 90^0$. Suy ra bốn điểm K, M, C, Z cùng thuộc một đường tròn mà ta gọi đường tròn đó là (v).

Xét phương tích của điểm P đối với vòng tròn (v) ta có :

$$\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PK}.\overrightarrow{PZ}. \tag{2}$$

a_4) Tương tự, nếu $DN \cap XY = \{K'\}$ thì

$$\overrightarrow{PN}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PK'}.\overrightarrow{PZ}. \tag{3}$$

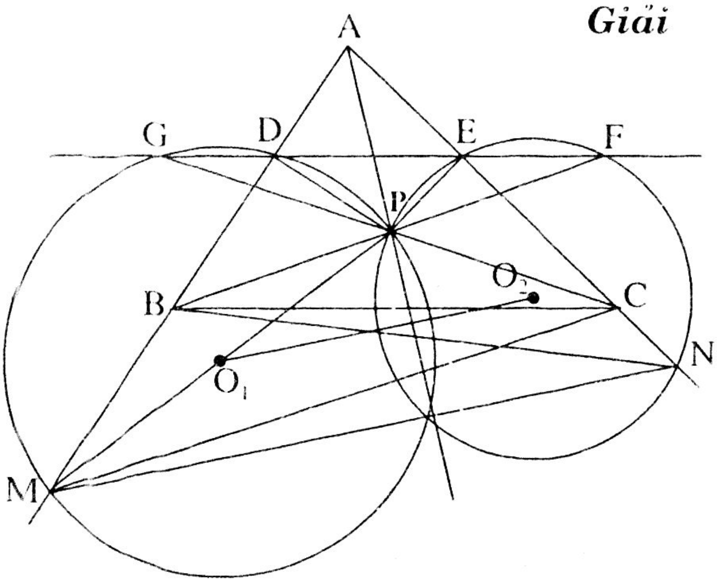
a_5) Từ (1), (2) và (3) ta có $\overrightarrow{PK}.\overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{PK'}.\overrightarrow{PZ}$.

Do $P \neq Z$ nên $K' \equiv K$. Vậy AM, DN, XY đồng quy.

b) Trường hợp $P \equiv X$. Khi đó $M \equiv X$ và $N \equiv X$. Do vậy AM, DN và XY đồng quy. Trường hợp $P \equiv Y$ được xét tương tự.

Bài 12. Cho hai điểm D và E tương ứng nằm trên các cạnh AB và AC của tam giác ABC sao cho DE // BC. Gọi P là điểm bất kì nằm bên trong tam giác ABC. Các đường thẳng PB và PC lần lượt cắt DE tại F và G. Nếu O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PDG và O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PFE, hãy chứng minh rằng $AP \perp O_1O_2$.

Giải



Gọi M là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn ngoại tiếp tam giác DPG; gọi N là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn ngoại tiếp tam giác EPF.

Dễ thấy $\widehat{DMP} = \widehat{DGP}$ và $\widehat{DGP} = \widehat{BCP}$, do đó $\widehat{DMP} = \widehat{BCP}$ và bốn điểm B, C, P, M cùng nằm trên một đường tròn. Tương tự, B, C, P, N cùng nằm trên một đường tròn. Như vậy bốn điểm B, C, M, N cùng nằm trên một đường tròn, suy ra $\widehat{DMN}$ bù hoặc bằng $\widehat{BCN}$.

Theo tính chất song song, ta có $\widehat{BCN} = \widehat{DEN}$, từ đó bốn điểm D, E, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

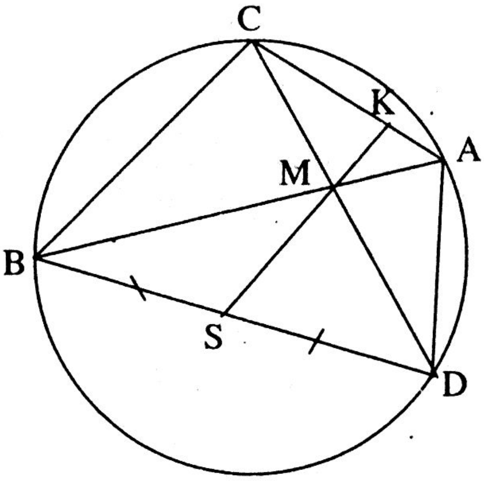
Tiếp theo, áp dụng định lí về trục đẳng phương cho các đường tròn ngoại tiếp DGP, EPF và DEMN để chứng tỏ rằng $DM \cap EN = A$ nằm trên trục đẳng phương của các đường tròn ngoại tiếp PDG và PEF, từ đó suy ra $AP \perp O_1O_2$, điều phải chứng minh.

Bài 13. Cho đường tròn (O) với hai dây AB, CD cắt nhau tại M. Qua trung điểm S của BD kẻ SM cắt AC tại K. Chứng tỏ rằng:

$$\frac{AM^2}{CM^2} = \frac{AK}{CK}.$$

Giải

Đặt $x = \dfrac{AK}{CK}$, ta có:



$$\overline{MK} = \frac{1}{1+x}\overline{MA} + \frac{x}{1+x}\overline{MC}. \quad (1)$$

Do $\overline{MK}$ cùng phương với $\overline{MS}$ nên có số l để

$$\overline{MK} = l.\overline{MS} = \frac{l}{2}(\overline{MB} + \overline{MD}).$$

Ta lại có MA.MB = MC.MD = $a > 0$

nên: $\overline{MB} = -\frac{a}{MA^2}\overline{MA}$, $\overline{MD} = -\frac{a}{MC^2}\overline{MC}$

từ đó ta được

$$\overline{MK} = -\frac{al}{2MA^2}\overline{MA} - \frac{al}{2MC^2}\overline{MC}. \quad (2)$$

Đến đây, (1) và (2) cho ta:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+x} = -\dfrac{al}{2MA^2}. \\ \dfrac{x}{1+x} = -\dfrac{al}{2MC^2}. \end{cases}$$

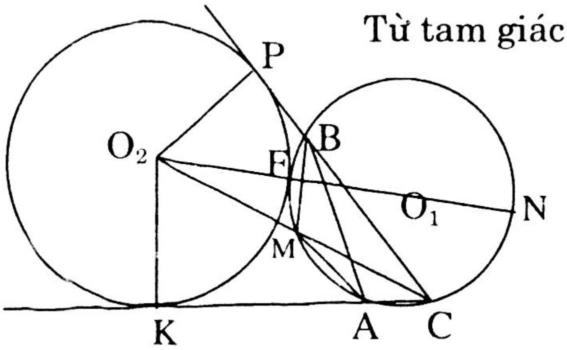
Suy ra $x = \frac{AM^2}{CM^2}$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 14. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O_1) bán kính R. Đường tròn (O_2) tiếp xúc ngoài với đường tròn (O_1) và tiếp xúc với hai cạnh CA, CB kéo dài. Chứng minh hệ thức:

$$\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}\left(\frac{r}{\sin\frac{C}{2}} - \frac{b\sin\left(B+\frac{C}{2}\right)}{\sin B}\right) = (2R+r)r.$$

Giải

Gọi K là điểm tiếp xúc của (O_2) với CA.



Từ tam giác vuông CO_2K ta có:

$$CO_2 = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Vì $\widehat{AMC} = \widehat{B}$, nên

$$\widehat{MAC} = 180^0 - \left(B + \frac{C}{2}\right).$$

Theo Định lí hàm số sin trong tam giác BCM, ta có:

$$CM = \frac{b\sin\left(B + \frac{C}{2}\right)}{\sin B}, \text{ từ đó } O_2M = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}} - \frac{b\sin\left(B + \frac{C}{2}\right)}{\sin B}.$$

Từ phương tích của điểm O_2 đối với đường tròn (O_1) ta có: $O_2C.O_2M = O_2N.O_2F$ hay

$$\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}\left(\frac{r}{\sin\frac{C}{2}} - \frac{b\sin\left(B + \frac{C}{2}\right)}{\sin B}\right) = (2R + r)r.$$

P18. Xét mệnh đề sau: Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại một điểm M. Khi đó, bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn nếu và chỉ nếu MA.MB = MC.MD. Mệnh đề này có luôn đúng không, tại sao?

P19. Cho đường tròn (O ; R) và một điểm A cố định không nằm trên đường tròn. Gọi BC là một đường kính thay đổi của (O ; R). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua một điểm cố định khác điểm A.

P20. Cho hai tứ giác nội tiếp ABCD và CDEF. Nếu ba đường thẳng AB, CD, FE đồng quy thì tứ giác ABFE cũng nội tiếp.

P21. Cho tam giác ABC có AB = 13, BC = 14, CA = 15 và có đường cao AH.

a) Tính diện tích S của tam giác ABC.

b) Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Tính AH.

d) Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

e) Tính $\mathscr{P}_{H/(M)}$, trong đó (M) là đường tròn đường kính BC.

P22. Cho hai đường tròn ngoài nhau. Chứng minh rằng 4 trung điểm của 4 đoạn tiếp tuyến chung (tức là đoạn thẳng nối hai tiếp điểm của cùng một tiếp tuyến) nằm trên cùng một đường thẳng.

P23. Cho tam giác ABC, bên ngoài tam giác này, vẽ các tam giác cân BCD, CAE, ABF có các cạnh đáy tương ứng là BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba đường thẳng vuông góc kẻ từ A, B, C tương ứng xuống EF, FD, DE đồng quy.

P24. Gọi BD là phân giác góc B trong tam giác ABC, D nằm trên AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDC cắt AB tại E, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt BC tại F. Chứng minh rằng AE = CF.

P25. Trong đường tròn (O) cho hai dây cung AB và CD cắt nhau ở I sao cho AI = 12, IB = 16, CD = 32. Tính CI và ID.

P26. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác lồi ABCD. Đường phân giác của góc ACD cắt tia BA tại K. Giả sử MA.MC + MA.CD = MB.BD, chứng minh rằng $\widehat{BKC} = \widehat{CBD}$.

P27. Các cạnh của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$BC = AC + \frac{1}{2}AB.$$

Điểm P chia cạnh AB theo tỉ số 3: 1. Chứng minh $\widehat{PAC} = 2\widehat{CPA}$.

P28. Cho tam giác ABC. Một đường tròn tâm O đi qua các điểm A và C và lại cắt các đoạn AB và BC theo thứ tự tại hai điểm phân biệt K và N. Giả sử các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và KBN cắt nhau tại đúng hai điểm phân biệt B và M.

Chứng minh góc OMB vuông.

P29. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Đặt

AB = c, AC = b. Gọi (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt là các đường tròn có đường kính lần lượt là AB, AC, và BC.

Tính $\mathscr{P}_{H/(O_1)}$, $\mathscr{P}_{H/(O_2)}$ và $\mathscr{P}_{H/(O_3)}$ theo b và c.

P30. Cho đường tròn (O ; R) và một điểm P nằm bên trong đường tròn. Cho hai dây cung thay đổi AB và CD luôn luôn đi qua P và vuông góc với nhau.

a) Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = 4(R^2 - \mathscr{P}_{P/(O)})$.

b) Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của các điểm P, A, B, C, D (miễn là AB và CD luôn luôn đi qua P và vuông góc với nhau).

P31. Cho hình bình hành ABCD, lấy hai điểm tùy ý A' và B' trên cạnh AB. Các đường thẳng CA' và DB' cắt nhau ở P. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua P và song song với BC là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác PAA' và tam giác PBB'.

P32. Cho điểm P ngoài đường tròn (O), một đường thẳng thay đổi qua P cắt (O) tại hai điểm A và B. Các tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau ở M. Kẻ MH vuông góc với PO.

a) Chứng minh rằng năm điểm O, A, B, M, H nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng H là điểm cố định khi đường thẳng PAB thay đổi, từ đó suy ra quỹ tích của điểm M.

c) Gọi I là trung điểm của AB và N là giao điểm của MH với AB. Chứng minh rằng PA.PB = PI.PN.

d) Chứng minh: $IP.IN = IA^2$.

P33. Cho tam giác ABC. Gọi AH là đường cao, kẻ HE ⊥ AB và HF ⊥ AC. Cho EF cắt BC tại điểm I.

a) Chứng minh tứ giác BCFE nội tiếp.

b) Gọi đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC và (O') là đường tròn đường kính AH. Chứng minh I là giao điểm hai trục đẳng phương của hai đường tròn này.

c) Giả sử (O) và (O') cắt nhau tại A và D. Chứng minh rằng I, D, A thẳng hàng.

P34. Gọi D là điểm nằm trên cạnh AC của tam giác ABC. Chứng minh rằng $AB^2.DC + BC^2.AD - BD^2.AC = AC.DC.AD$.

Chú ý. Kết quả của bài này sẽ được sử dụng trong P35, P36, P37, P38 dưới đây.

P35. Cho tam giác ABC có BC = 2.AC – 2.AB và D là điểm nằm trên cạnh BC. Chứng minh rằng $\widehat{ABD} = 2\widehat{ADB}$ nếu và chỉ nếu

$$BD = 3CD.$$

P36. Cho ABC là một tam giác không cân. Các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại các điểm thứ hai L, M, N. Giả sử LM = LN, hãy chứng minh

$$2BC^2 = AB^2 + AC^2 .$$

P37. Trong tam giác ABC, kí hiệu A, B, C là số đo ba góc và a, b, c là các cạnh đối tương ứng, giả sử $b = \frac{1}{2}(a + c)$, chứng minh

$$\cos(A - C) + 4\cos B = 3.$$

P38. Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự cùng nằm trên một đường thẳng. Một đường tròn (k) đi qua hai điểm B, C sao cho AM, AN, DK và DL là các tiếp tuyến của (k).

a) Chứng minh rằng các điểm

$$P = MN \cap BC \text{ và } Q = KL \cap BC$$

không phụ thuộc vào đường tròn (k).

b) Giả sử AD = a, BC = b (a > b) và đoạn thẳng BC di chuyển trên đoạn AD, tìm độ dài bé nhất của đoạn thẳng PQ.

P39. Cho R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của một tam giác. Chứng minh công thức Euler sau đây:

$$d^2 = R^2 - 2Rr .$$

LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN CÁC BÀI TẬP CHƯƠNG 2

S1. Ta chứng minh a). Tiến hành tương tự cho b) và c). Trong tam giác ABC, góc A nhọn khi và chỉ khi cosA > 0. Ta có

$$\cos A > 0 \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2.$$

S2. HD: Ta có:

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2b}{BD}\cdot\frac{a+c}{BD} = \frac{2b(a+c)}{BD^2} = \frac{2b(a+c)}{(a+c)^2+b^2}$$

$$= \frac{2b(a+c)}{a^2+2ac+c^2+b^2} = \frac{2b(a+c)}{2a^2+2ac} = \frac{b}{a} = \frac{AC}{BC} = \sin 2\alpha .$$

Như vậy ta có công thức $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Ta có

$$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2(a+c)^2}{BD^2} - 1 = \frac{2(a+c)^2}{(a+c)^2+b^2} - 1$$

$$= \frac{2(a+c)^2}{2a(a+c)} - 1 = \frac{c}{a} = \cos 2\alpha.$$

Như vậy ta có công thức $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

S3. **a)** Trong tam giác ABC, theo định lí hàm số cosin ta có:

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c.\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a} \\ b.\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a} \end{cases}$$

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được:

$$c.\cos B + b.\cos C$$

$$= \frac{a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a .$$

b) Áp dụng định lí hàm số cosin có:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B ;$$

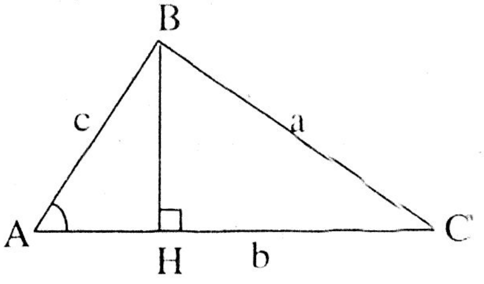
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C.$$

Trừ vế với vế ta được:

$$b^2 - c^2 = c^2 - b^2 + 2ab.\cos C - 2ac.\cos B$$

$$2(b^2 - c^2) = 2a(b.\cos C - c.\cos B)$$

$$b^2 - c^2 = a(b.\cos C - c.\cos B).$$



c) Ta có: $AH = c.\cos A$; $HC = a.\cos C$.

Vì $b = AH + HC$ nên

$b = c.\cos A + a.\cos C \Rightarrow c.\cos A = b - a.\cos C$

$\Rightarrow c^2.\cos A = bc - ac.\cos C$. (1)

Tương tự,

$c = a.\cos B + b.\cos A \Rightarrow b.\cos A = c - a.\cos B$

$$\Rightarrow b^2.\cos A = bc - ab.\cos B. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $b^2\cos A - c^2\cos A =$

$$= bc - ab.\cos B - bc + ac.\cos C,$$

suy ra $(b^2 - c^2)\cos A = a(c.\cos C - b.\cos B)$.

S4. Ta có $a = 2R.\sin A$, do đó, đẳng thức $R(b + c) = a\sqrt{bc}$ trở thành $\frac{1}{2}(b + c) = \sin A.\sqrt{bc}$ (1). Mặt khác,

$$\frac{1}{2}(b + c) \geq \sqrt{bc}, \qquad (2)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$; đồng thời, cũng có

$$\sin A.\sqrt{bc} \leq \sqrt{bc}, \qquad (3)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = 90^0$.

Do đó, để (1) xảy ra thì đẳng thức ở (2) và (3) phải đồng thời xảy ra, nghĩa là phải có $b = c$ và $A = 90^0$, $B = 45^0$, $C = 45^0$.

S5. Vì G là trọng tâm tam giác nên $GA = \frac{2}{3}m_a$. Từ công thức đường trung tuyến suy ra $GA^2 = \frac{4}{9}m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{9}$. Tương tự,

$$GB^2 = \frac{4}{9}m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{9}, \quad GC^2 = \frac{4}{9}m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{9}.$$

Cộng các đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh.

S6. **a)** $\widehat{B} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 75^\circ$ nên ΔABC cân đỉnh A, suy ra

$$AB = AC = 4,5.$$

Theo định lí hàm số sin:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow a=\frac{b\sin A}{\sin B}\approx\frac{4,5.0,5}{0,97}\approx 2,3.$$

b) $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B}+\hat{C}) = 180^\circ - (83^\circ + 57^\circ) = 40^\circ$;

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}\approx\frac{137,5.0,9925}{0,6427}\approx 212,3\ ;$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}\approx\frac{137,5.0,8387}{0,6427}\approx 179,4\,.$$

S7. HD: Hạ $AH \perp BC$ (kéo dài). Ta cần tính CH.

ΔABC là tam giác cân, do đó AC = CB = 100m.

Xét tam giác vuông AHC:

$$CH = AC\sin 30^\circ = 100.\frac{1}{2} = 50\ (m).$$

S8. HD:

a) Quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là đường tròn tâm O, bán kính $R_1 = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, với $a = AB$, $\alpha = \widehat{AOB}$.

b) Quỹ tích các điểm C là đường tròn tâm O, bán kính

$$R_2 = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

c) Ta có $A'B' = a\cos\alpha$ không đổi. Quỹ tích các điểm H là đường tròn tâm O, bán kính $R_3 = \dfrac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

S9. Ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-7\right)\left(\frac{21}{2}-8\right)\left(\frac{21}{2}-6\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{21.7.5.9} = \frac{21\sqrt{15}}{4}.$$

Vì $S = \dfrac{1}{2}ah_a$, ta có $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$. Từ đó,

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{8^2+6^2}{2} - \frac{7^2}{4} = \frac{151}{4}.$$

Vậy $m_a = \dfrac{\sqrt{151}}{2}$.

S10. Đặt AB = c, AC = b, ta có

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\theta = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos\theta).$$

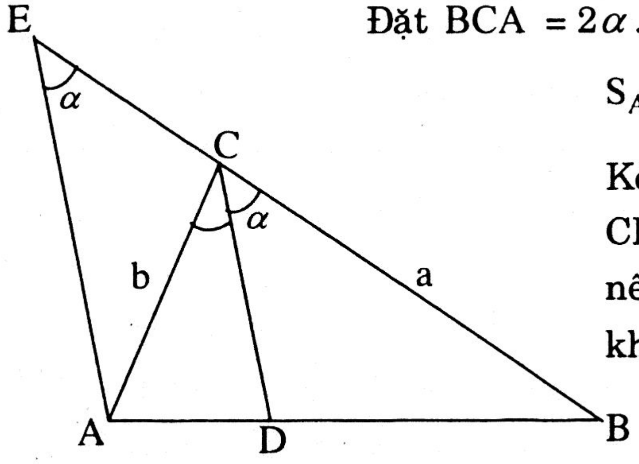
Mặt khác, $k = \frac{1}{2}bc.\sin\theta$, do đó

$$BC^2 = (b - c)^2 + 4k(1 - \cos\theta)/\sin\theta.$$

Vì $4k(1 - \cos\theta)/\sin\theta$ không đổi nên BC bé nhất khi b = c. Vậy

$$b = c = \sqrt{\frac{2k}{\sin\theta}} \text{ (do } k = \frac{1}{2}bc.\sin\theta\text{)}.$$

S11. Gọi tam giác đã cho là ABC, cho phân giác $CD = l$.



Đặt $\widehat{BCA} = 2\alpha$. Ta có

$$S_{ABC} = S_{BCD} + S_{DCA} = \frac{1}{2}(a + b)l.\sin\alpha.$$

Kẻ đường thẳng qua A và song song CD, cắt BC tại E. Tam giác ACE cân nên CE = b và $AE = 2b\cos\alpha$. Mặt khác,

$$\frac{CD}{AE} = \frac{BC}{BE} \Rightarrow AE = \frac{a+b}{a}l.$$

Do đó $\cos\alpha = \frac{a+b}{2ab}l$, suy ra $\sin\alpha = \frac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)^2l^2}$.

Cuối cùng ta được:

$$S_{ABC} = \frac{(a+b)l}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)^2l^2}.$$

S12. Kí hiệu như thường lệ, ta có c và h_c cho trước, do vậy

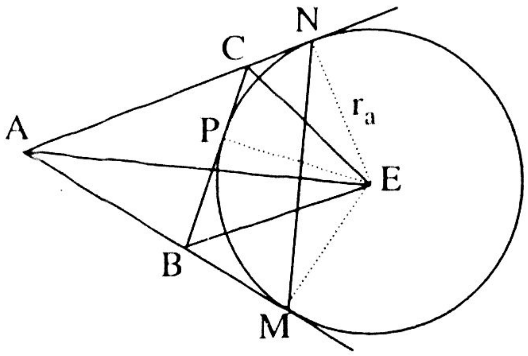
$$S = \frac{1}{2}ch_c$$

là hằng số. Suy ra $8S^3 = (ah_a)(bh_b)(ch_c)$ không đổi. Như thế, để tích $h_ah_bh_c$ đạt giá trị lớn nhất, ta cần có tích abc đạt giá trị nhỏ nhất, nghĩa là ab đạt giá trị nhỏ nhất, vì c được cho trước.

Vì S không đổi nên ta có 2S = ab.sinC không đổi. Do đó, ab đạt giá trị nhỏ nhất khi sinC đạt giá trị lớn nhất. Theo giả thiết, góc C không tù (tức là nhọn hoặc vuông), mà trong những góc này thì sin lớn nhất là bằng 1, ứng với góc C vuông.

Vậy tam giác ABC thoả mãn đề bài là tam giác vuông tại C.

S13.



a) Gọi E là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC ứng với cạnh BC = a; gọi P, M, N là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp này với cạnh BC, AB, AC tương ứng. Khi ấy ta có:

$$S = S_{EBA} + S_{ECA} - S_{EBC}$$

$$= \frac{AB.EM}{2} + \frac{AC.EN}{2} - \frac{BC.EP}{2} = (p-a)r_a.$$

Tương tự, ta có: $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$.

b) Theo công thức tính diện tích trên, ta có

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c.$$

Suy ra $S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)rr_ar_br_c$ hay $S^2 = rr_ar_br_c$, tức là

$$S = \sqrt{rr_ar_br_c}\ .$$

* Mặt khác, ta cũng có

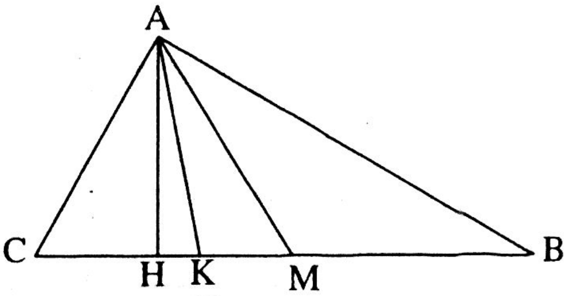
$$\frac{ar_br_c}{r_b + r_c} = \frac{a.\dfrac{S}{p-b}\dfrac{S}{p-c}}{\dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-c}} = \frac{aS}{(p-c)+(p-b)} = \frac{aS}{2p-(b+c)} = \frac{aS}{a} = S.$$

S14. Ta phải có hai góc A/2 và B/2 thuộc khoảng (0, π /2). Trong khoảng này, hàm sinx tăng thực sự và hàm cosx giảm thực sự, do đó, nếu A/2 > B/2 thì sin(A/2) > sin(B/2) và

$$\frac{1}{\cos(A/2)} > \frac{1}{\cos(B/2)}.$$

Điều tương tự như thế cũng xảy ra khi A/2 < B/2. Từ đó, suy ra đẳng thức ở đề bài chỉ xảy ra khi A/2 = B/2 và tam giác đã cho là cân. Vậy AC = 1.

S15. Giả sử AB ≥ AC. Ta có BK/KC = AB/AC ≥ 1, nên K nằm giữa M và C. Đặt MH = x.



Khi đó, vì

$$[AHM] = \frac{1}{4}[ABC],$$

nên BC = 4x, suy ra

$BM = 2x$, $HC = x$.

Vì $[AKM] = 1 - \sqrt{3}/2$ nên $MK = (4 - 2\sqrt{3})x$. Suy ra

$$AB/AC = (BM + MK)/(MC - MK)$$
$$= (6 - 2\sqrt{3})/(2\sqrt{3} - 2) = \sqrt{3}.$$

Ta lại có $AB^2 - BH^2 = AH^2 = AC^2 - CH^2$, do đó

$$AB^2 - AC^2 = (3x)^2 - x^2.$$

Suy ra $AC^2 = 4x^2$. Từ đó, $AC : AB : BC = 1 : \sqrt{3} : 2$.

Vậy $\widehat{A} = 90^0$, $\widehat{B} = 30^0$, $\widehat{C} = 60^0$.

S16. Từ các công thức

$$r = \frac{S}{P},\ R = \frac{abc}{4R},\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ ta có:

$$2p^2 - 2r^2 - 8Rr = 2p^2 - 2\frac{S^2}{p^2} - 2\frac{abc}{p}$$

$$= 2p^2 - \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{p} - \frac{2abc}{p}$$

$$= \frac{2p^2(a+b+c) - 2p(ab+bc+ca)}{p}$$

$$= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2.$$

S17. Cho ΔABC có trọng tâm G và một điểm M bất kì. Ta có kết quả sau:

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Áp dụng kết quả trên, khi $M \equiv I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có :

$$3IG^2 = IA^2 + IB^2 + IC^2 - \frac{1}{3}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right).$$

Kẻ $IK \perp AB$ thì $AK = p - a$. Tam giác AKL vuông ở K nên :

$$IA^2 = IK^2 + KA^2 = (p-a)^2 + r^2.$$

Tương tự ta có :

$$IB^2 = (p-b)^2 + r^2, IC^2 = (p-c)^2 + r^2.$$ Do đó:

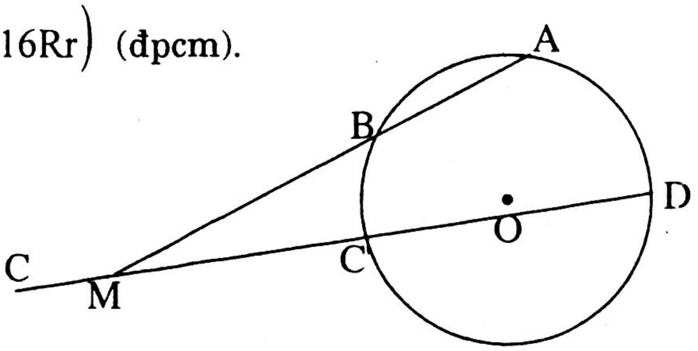
$$3IG^2 = (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + 3r^2 - \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

$$= 3r^2 - p^2 + \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Theo kết quả ở Ví dụ S16 ta có :

$$3IG^2 = 3r^2 - p^2 + \frac{2}{3}(2p^2 - 2r^2 - 8Rr) = \frac{1}{3}(p^2 + 5r^2 - 16Rr).$$

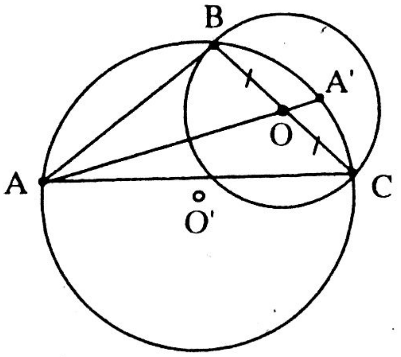
Vậy $IG^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$ (đpcm).



S18. Không luôn luôn đúng. *Ví dụ:* Trên hình vẽ bên, giả sử MC = MC'. Rõ ràng hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M và ta có:

$$MA.MB = MC'.MD = MC.MD.$$

Nhưng A, B, C,D không cùng thuộc một đường tròn.



S19. Xét đường tròn (O') ngoại tiếp ΔABC. Vì O là điểm giữa của đoạn BC nên O phải nằm trong đường tròn (O'). Gọi A' là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO và đường tròn (O'), hiển nhiên O là điểm nằm bên trong đoạn AA'. Ta có

$$\mathscr{P}_{O/(O')} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = -R^2.$$

Suy ra: $OA' = \frac{R^2}{OA}$ không đổi. Vì OA và OA' là hai tia đối nhau, O và A cố định nên từ đây suy ra A' cố định.

Vậy mọi đường tròn ngoại tiếp ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài luôn đi qua một điểm cố định khác điểm A.

S20. Gọi Q là giao điểm của ba đường thẳng AB, CD, FE. Ta có

$$QA.QB = QC.QD = QE.QF.$$

Vì QA.QB = QE.QF nên suy ra tứ giác ABFE cũng nội tiếp.

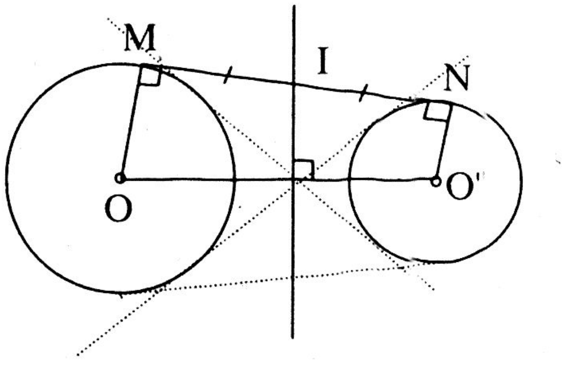
S21. HD:

a) S = 84 (Hê-rông). **b)** $R = abc/\ 4S = 65/\ 8 = 8,125$.

c) $h_a = 2S/\ a = 12$. **d)** $r = S/\ p = 4$.

e) Gọi M là trung điểm BC, ta có

$$\mathscr{P}_{H/(M)} = HM^2 - MC^2 = AM^2 - AH^2 - MC^2 = -45.$$

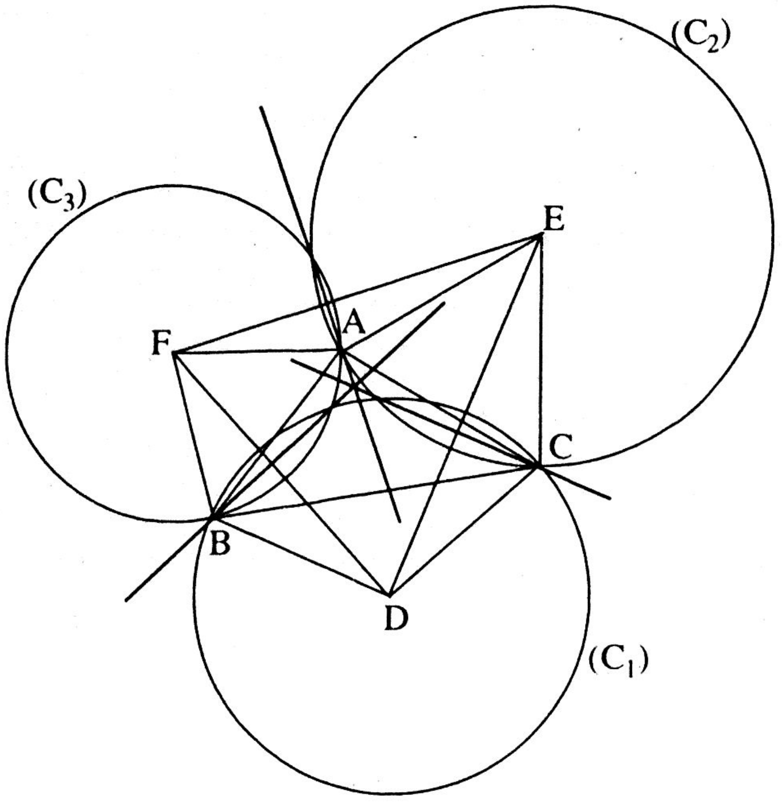


S22. Gọi I là trung điểm của tiếp tuyến chung ngoài MN. Ta có

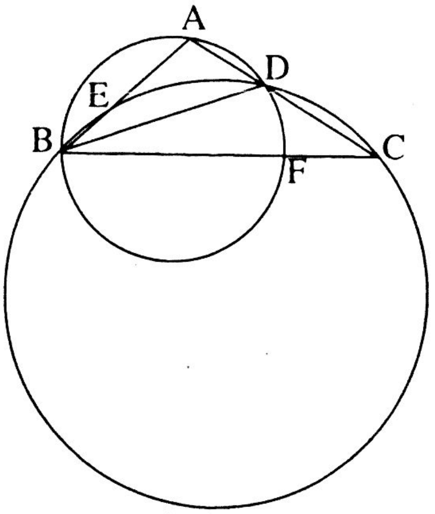
$$IM = IN \text{ hay } IM^2 = IN^2,$$

tức là $\mathscr{P}_{I/(O)} = \mathscr{P}_{I/(O')}$. Vậy điểm I nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn. Chứng minh tương tự cho ba trung điểm còn lại, chúng đều nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn ngoài nhau.

S23.



Gọi (C_1) là đường tròn tâm D bán kính BD, (C_2) là đường tròn tâm E bán kính CE và (C_3) là đường tròn tâm F bán kính AF. Đường thẳng qua A vuông góc với EF là trục đẳng phương của (C_2) và (C_3); đường thẳng qua B vuông góc với FD là trục đẳng phương của (C_3) và (C_1); đường thẳng qua C vuông góc với DE là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2). Ba đường thẳng này đồng quy tại tâm đẳng phương của ba đường tròn, suy ra điều phải chứng minh.

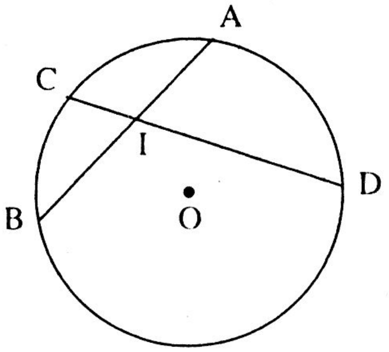


S24.

Ta có $AE \times AB = AD \times AC$ và $CF \times CB = CD \times CA$, suy ra

$$AE/CF = (AD/CD)(BC/AB).$$

Ngoài ra, $AB/CB = AD/CD$ theo định lí về đường phân giác. Vậy $AE = CF$.



S25. Ta có : $IA.IB = IC.ID,$ (1)

$$CD = CI + ID \Rightarrow CI = 32 - ID.$$

Thay vào (1) ta được:

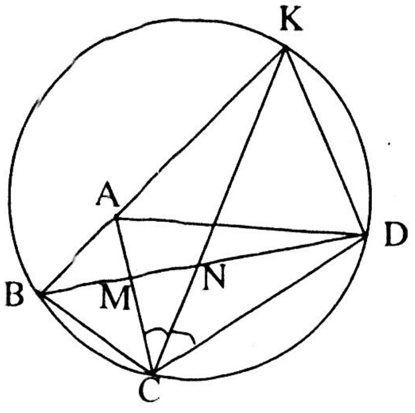
$$ID^2 - 32ID + 192 = 0$$

$$\Rightarrow ID = 24 \text{ hoặc } ID = 8.$$

Vậy $CI = 8$, $ID = 24$ hoặc

$CI = 24$, $ID = 8$.

S26.



Gọi N là giao điểm của CK và BD. Áp dụng định lí về đường phân giác vào tam giác MCD ta có

$$\frac{CD}{DN} = \frac{MC}{MN} \Leftrightarrow CD = \frac{MC.DN}{MN}.$$

Khi đó, ta được

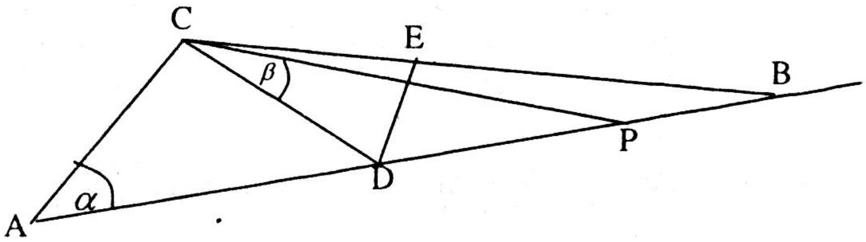
$$MB.MD = MA.MC + MA.\frac{MC.DN}{MN}$$

$$= MA.MC.\frac{MD}{MN}$$

hay MA.MC = MB.MN. Do M nằm bên trong tứ giác lồi ABCN, từ đó suy ra K, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Vậy $\widehat{BKC} = \widehat{CBD}$.

S27. Kí hiệu a, b, c tương ứng là ba cạnh đối của các đỉnh A, B, C trong tam giác ABC. Gọi (k) là đường tròn tâm C bán kính b. Gọi D, E lần lượt là giao điểm của (k) với AB, CB.



Khi đó:

$$\mathscr{P}_{M/(k)} = BE.(BE + 2b) = c/2(c/2 + 2b) = BD.BA = BD.c.$$

Suy ra BD = $b + c/4$, do đó PD = BD − $c/4 = b$ và DC = b.

Vậy PD = DC, hay tam giác PDC cân.

Suy ra $\alpha = 2\beta$ (xem hình), hay $\widehat{PAC} = 2\widehat{CPA}$.

S28. Gọi P là giao điểm các đường thẳng AC và KN. Do

$$\widehat{KMA} = \widehat{BMA} - \widehat{BMK} = \widehat{BCA} - \widehat{BNK} = \widehat{KPA},$$

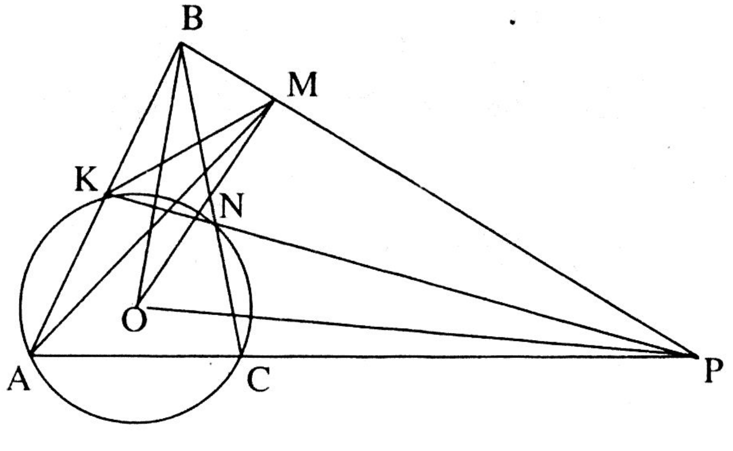
nên bốn điểm M, P, A, K nằm trên một đường tròn. Ngoài ra:

$$\widehat{AMP} = \widehat{AKP} = 180^0 - \widehat{ACB} = 180^0 - \widehat{AMB}$$

(tứ giác ACNK nội tiếp). Vậy điểm M nằm trên đoạn BP.

Đặt BO = b, PO = p và gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác ACNK, ta có: BM.BP = BK.BA = $b^2 - R^2$;

$$PM.PB = PK.PN = p^2 - R^2.$$



Cộng từng vế hai đẳng thức này ta được:

$$BP^2 = b^2 + p^2 - 2R^2$$

khi đó

$$BM^2 - PM^2 = \left(\frac{b^2 - R^2}{BP}\right)^2 - \left(\frac{p^2 - R^2}{BP}\right)^2$$

$$= \frac{(b^2 + p^2 - 2R^2)(b^2 - p^2)}{BP^2} = b^2 - p^2 = BO^2 - PO^2.$$

Từ đó $OM \perp BP$.

***Chú ý:** $OM \perp BP$ do kết quả sau*: Cho tam giác ABC, H là điểm nằm trên cạnh BC. Khi đó, AH là đường cao nếu và chỉ nếu

$$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2.$$

Chứng minh. Nếu AH là đường cao, từ định lí Pythagore:

$$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2. \qquad (*)$$

Ngược lại, nếu có (*), ta gọi M là điểm trên BC sao cho AM là đường cao. Khi đó, theo chứng minh trên,

$$AB^2 - AC^2 = MB^2 - MC^2.$$

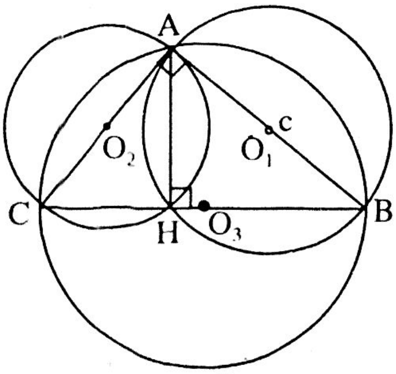
Từ đó ta được $HB^2 - HC^2 = MB^2 - MC^2$, hay

$$(HB + HC)(HB - HC) = (MB + MC)(MB - MC)$$

$$\Leftrightarrow BC(HB - HC) = BC(MB - MC)$$

$$\Leftrightarrow (HB - HC) = (MB - MC).$$

Vậy M trùng H, suy ra điều phải chứng minh.



S29. Vì H nằm trên (O_1) và (O_2) nên

$\mathscr{P}_{H/(O_1)} = \mathscr{P}_{H/(O_2)} = 0.$

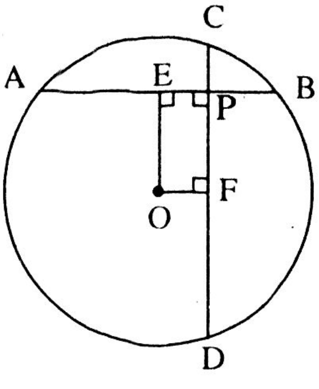
Ta có

$\mathscr{P}_{H/(O_3)} = -HB.HC = -HA^2.$

Vì $2S\,\Delta ABC = a.AH = b.c$ nên

$$AH = \frac{bc}{a} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Vậy $\mathscr{P}_{H/(O_3)} = -HA^2 = -\dfrac{b^2c^2}{b^2 + c^2}.$



S30. a) Gọi E, F là trung điểm AB, CD.

Ta có:

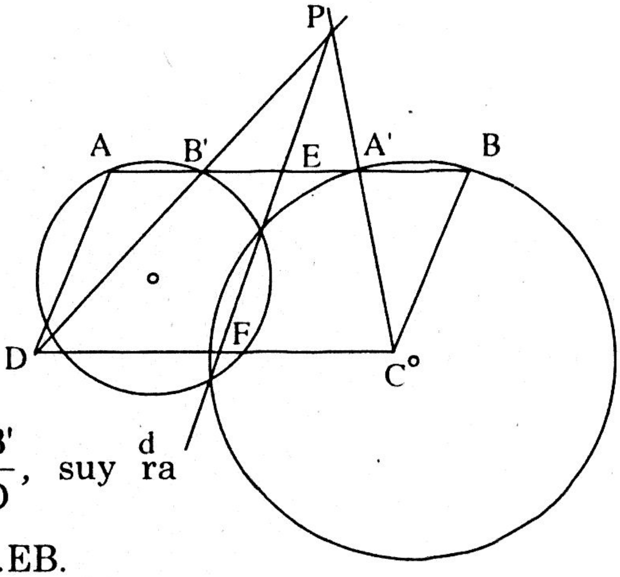
$AB^2 + CD^2 = (2AE)^2 + (2CF)^2$

$= 4(AO^2 - OE^2 + CO^2 - OF^2)$
$= 4(2R^2 - (OR^2 + OF^2))$
$= 4(2R^2 - OP^2) = 8R^2 - 4.OP^2$
$= 4R^2 - 4(OP^2 - R^2) = 4(R^2 - \mathscr{P}_{P/(O)})$.

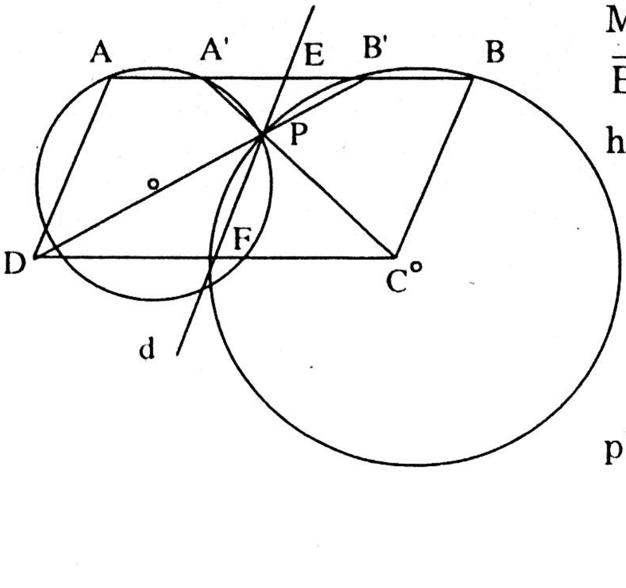
b) $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 =$
$= (PA + PB)^2 + (PC + PD)^2 - 2PA.PB - 2PC.PD$
$= (PA + PB)^2 + (PC + PD)^2 + 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD}$
$= AB^2 + CD^2 + 4\mathscr{P}_{P/(O)}$
$= 8R^2 - 4PO^2 + 4(PO^2 - R^2) = 4R^2$ (không đổi).

Vậy $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của các điểm P, A, B, C, D (miễn là AB và CD luôn luôn đi qua P và vuông góc với nhau).

S31.



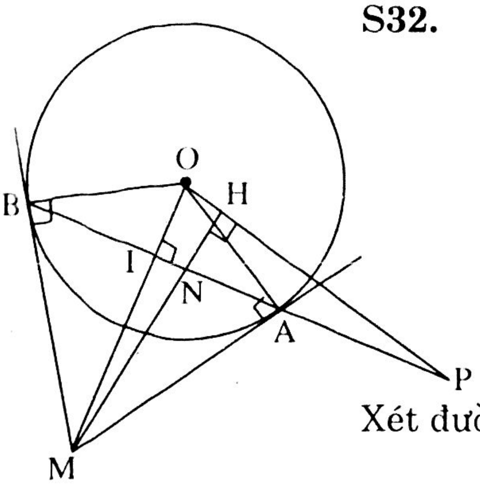
Ta kí hiệu các đường tròn ngoại tiếp tam giác PAA' và PBB' là (O) và (O'). Đường thẳng qua P, song song với BC cắt các đường thẳng AB, CD tại E, F. Theo định lí Ta-let ta có: $\frac{EA'}{FC} = \frac{EB'}{FD}$, suy ra $EA'.FD = EB'.FC$, hay $EA'.EA = EB'.EB$.



Mặt khác, ta luôn có $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EA'}$ và $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EB'}$ cùng dấu dù P nằm trong hay ngoài các đoạn CA', DB'. Từ đó ta có $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EA'} = \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EB'}$, hay $\mathscr{P}_{E/(O)} = \mathscr{P}_{E/(O')}$.

Vậy E thuộc trục đẳng phương của (O) và (O').

Mặt khác: P thuộc hai đường tròn trên, nên P thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (O'). Vậy PE là trục đẳng phương của (O) và (O').



S32. **a)** Vì A, H, B đều nhìn đoạn thẳng MO dưới một góc vuông nên năm điểm A, H, B, M, O cùng nằm trên đường tròn (C) đường kính MO.

b) Xét đường tròn tâm O bán kính R ta có:

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = OP^2 - R^2. \qquad (1)$$

Xét đường tròn đường kính OM ta có:

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PH}.\overrightarrow{PO}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\overrightarrow{PH}.\overrightarrow{PO} = OP^2 - R^2$. Mặt khác:

$\overrightarrow{PH}.\overrightarrow{PO} = |\overrightarrow{PH}|.|\overrightarrow{PO}|\cos 0° = PH.PO \Rightarrow PH = \dfrac{OP^2 - R^2}{PO}$ không đổi.

Vì A và B ở cùng phía với P nên O, H cũng ở cùng phía với P, do đó H là điểm cố định. Vậy quỹ tích các điểm M là đường thẳng Δ vuông góc với OP tại H sao cho $PH = \dfrac{OP^2 - R^2}{PO}$.

c) Vì $OI \perp AB$, $NH \perp OH$ nên tứ giác OHNI nội tiếp đường tròn đường kính ON. Ta có: PI.PN = PO.PH. Theo câu **b)** ta có

PH.PO = PA.PB nên PI.PN = PA.PB.

d) Từ PA.PB = PI.PN, thay PA = PI – IA và

PB = PI + IB = PI + IA

ta có: PA.PB = (PI – IA)(PI + IA) = PI.PN hay $PI^2 - IA^2 = PI.PN$ tức là $PI^2 - PI.PN = IA^2$. Suy ra $PI(PI - PN) = IA^2$.

Vậy $PI.NI = IA^2$.

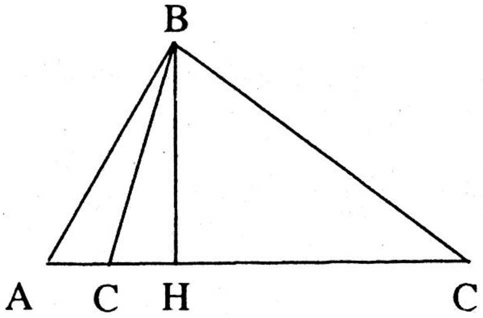
S33. HD:

a) AB.AE = AC.AF (cùng bằng AH^2), suy ra tứ giác BCFE nội tiếp.

b) $\mathscr{P}_{I/(O)} = IB.IC = IE.IF = \mathscr{P}_{I/(O')}$.

c) I, D, A cùng thuộc trục đẳng phương của (O) và (O').

S34.



Để thuận tiện, ta giả sử H (chân đường cao BH) nằm giữa D và C, trường hợp ngược lại được tiến hành tương tự. Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác BCD và ABD ta có:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2.DC.DH,$$

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2.AD.DH.$$

Từ hai đẳng thức trên ta suy ra

$$BC^2.AD + AB^2.DC = BD^2.(AD + DC) + DC^2.AD + AD^2.DC$$
$$= BD^2.AC + AD.DC.AC.$$

Chú ý. Khi D trùng một trong hai đỉnh, đẳng thức trên vẫn đúng, lúc đó, hoặc AD = 0, hoặc DC = 0.

Khi D trùng với M, với BM là trung tuyến của tam giác ABC, ta có MA = MC = AC/2 và đẳng thức trên trở thành

$$AB^2.MC + BC^2.AM - BM^2.AC = AC.MC.AM$$

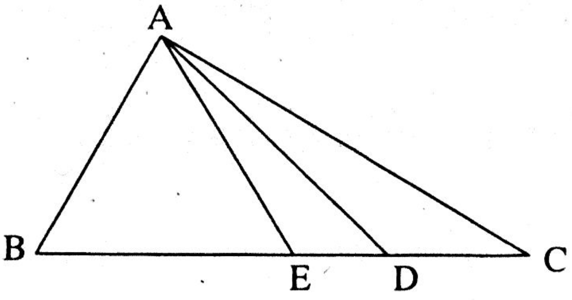
$$\Leftrightarrow AB^2.MA + BC^2.AM - AC.MA.AM = BM^2.AC$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{2}(AB^2 + BC^2 - AC.\frac{AC}{2}) = BM^2.AC$$

$$\Leftrightarrow 2BM^2 = (AB^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}),$$

đây chính là công thức trung tuyến đã biết.

S35.



* Giả sử BD = 3CD. Đặt AC = 2b, AB = 2c, ta có BC = 4(b – c), BD = 3(b – c) và CD = b – c.

Nếu AD = d thì áp dụng kết quả P34 ta nhận được

$$d^2 = 2c(3b - c).$$

Áp dụng định lí hàm sin cho các tam giác ABC và ABD ta có

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{3b-5c}{4c} \text{ và } \cos\widehat{ADB} = \frac{3b-c}{2\sqrt{2c(3b-c)}}.$$

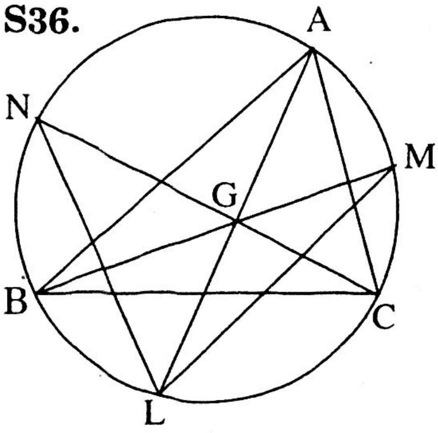
Khi đó,

$$\cos 2\widehat{ADB} = \frac{3b-5c}{4c}.$$

Suy ra, hoặc là $2\widehat{ADB} = \widehat{ABC}$, hoặc là $\widehat{ABC} + 2\widehat{ADB} = 360^0$. Trong trường hợp sau, ta có $\widehat{ABC} + \widehat{ADB} = 360^0 - \widehat{ADB} > 180^0$, điều này không đúng. Vậy $\widehat{ABC} = 2\widehat{ADB}$.

* Đảo lại, giả sử $2\widehat{ADB} = \widehat{ABC}$. Gọi D_1 là điểm nằm trên BC sao cho $BD_1 = 3CD_1$, thế thì $2\widehat{AD_1B} = \widehat{ABC} = 2\widehat{ADB}$, do đó D trùng D_1. Ta có điều phải chứng minh.

S36.



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, khi đó, các tam giác NLG và AGL đồng dạng nên LN / AC = LG / CG. Tương tự, ta cũng có

$$LM / AB = GL / BG.$$

Do vậy, nếu LM = LN thì AB / AC = BG / CG. Sử dụng kết quả P34 để tính độ dài các trung tuyến ta được:

$$AB^2 / AC^2 = (2AB^2 + 2BC^2 - AC^2)/(2AC^2 + 2BC^2 - AB^2),$$

hay, rút gọn thành $(AC^2 - AB^2)(2BC^2 - AB^2 - AC^2) = 0$. Mà tam giác ABC không cân nên ta có $2BC^2 = AB^2 + AC^2$.

S37. Nếu a = c thì a = b = c, do đó cos(A – C) = 1, $\cos B = \frac{1}{2}$ và kết quả cần chứng minh là hiển nhiên. Ta giả sử $a \neq c$. Không mất tính tổng quát, giả sử a > c. Kéo dài CA và lấy điểm D sao cho BD = BC. Đặt AD = x. Theo kết quả P34 ta có

$$c^2(b + x) + (b + x)bx = a^2b + a^2x,$$

suy ra $bx^2 + (c^2 + b^2 - a^2)x - b(a^2 - c^2) = 0$.

Thay $b = \frac{1}{2}(a + c)$, ta được :

$$x^2 + \frac{1}{2}(5c - 3a).x - (a + c)(a - c) = 0,$$

hay $(x + 2(c - a))(x + \frac{1}{2}(a + c)) = 0$. Từ đó, $x = 2(a - c)$.

Bây giờ, do $\angle ABD = A - C$ nên áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác ABD ta có

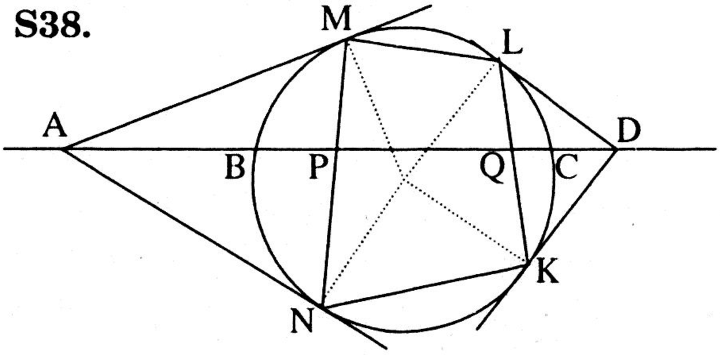
$$\cos(A - C) = \frac{1}{2ac}(a^2 + c^2 - x^2) = \frac{1}{2ac}(8ac - 3a^2 - 3c^2).$$

Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác ABC ta được

$$4\cos B = 4\frac{1}{2ac}(a^2 + c^2 - b^2) = \frac{1}{2ac}(3a^2 + 3c^2 - 2ac).$$

Từ đó suy ra $\cos(A - C) + 4\cos B = 3$.

S38.



a) Áp dụng kết quả P34 cho tam giác AMN và đoạn AP ta có

$$AP^2.MN = AM^2.NP + AN^2.MP - MN.MP.NP$$
$$= (AM^2 - MP.NP).MN$$

(ở đây, AM = AN theo tính chất tiếp tuyến). Suy ra

$$AP^2 = AM^2 - MP.NP = AB.AC - BP.CP$$
$$= AB.AC - (AC - AP)(AP - AB)$$
$$= 2.AB.AC - AP(AB + AC) + AP^2,$$

hay $AP = \dfrac{2AB.AC}{AB + AC}$. Tương tự, $DQ = \dfrac{2DB.DC}{DB + DC}$.

Các đẳng thức trên chứng tỏ rằng vị trí của các điểm P và Q không phụ thuộc vào đường tròn (k).

b) Đặt AB = x, BC = y và CD = z. Từ câu (a) suy ra

$$PQ = AD - AP - DQ =$$
$$= x + y + z - \frac{2x(x + y)}{y + 2x} - \frac{2z(y + z)}{y + 2z} =$$

$$= (x+y)\left(1-\frac{2x}{y+2x}\right)+z\left(\frac{2(y+z)}{y+2z}\right)$$

$$= \frac{y^2(x+y+z)}{(y+2x)(y+2z)}.$$

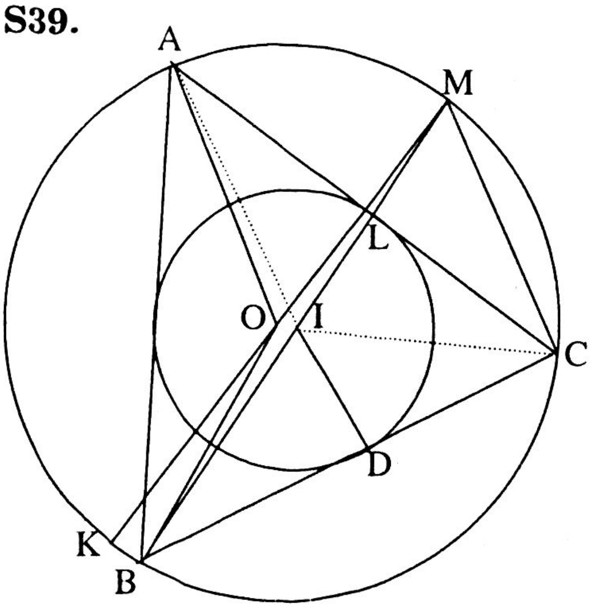
Ta lại có y = b, x + y + z = a, do đó

$$PQ = \frac{b^2a}{(a+x-z)(a+z-x)} = \frac{b^2a}{a^2-(x-z)^2} \geq \frac{b^2}{a}.$$

Vậy độ dài bé nhất của PQ là $\frac{b^2}{a}$, đạt được khi và chỉ khi

$$AB = CD = x = z = \frac{1}{2}(a-b).$$

S39.



Cách 1.

Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC, M là giao của phân giác góc B với (O).

Ta có:

$BI.IM = R^2 - OI^2 = R^2 - d^2$. Tam giác ICM cân tại M (vì $\widehat{CIM} = \widehat{ICM} = \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$).

Kẻ đường kính MK của đường tròn (O) và kẻ $ID \perp BC$, suy ra hai tam giác MKC và IBD đồng dạng nhau, từ đó:

$$\frac{MK}{MC} = \frac{IB}{ID}.$$

Nhưng MK = 2R, ID = r, MC = MI nên:

$$2Rr = IB.MC = IB.IM = R^2 - d^2.$$

Cách 2.

Gọi L là giao của phân giác góc B với AC. Theo tính chất đường phân giác trong các tam giác ABC và BCL ta có:

$$\frac{LC}{AL}=\frac{a}{c}\Rightarrow LC=\frac{ab}{a+c}$$

$$\frac{BI}{IL}=\frac{a}{LC}=\frac{a+c}{b}.$$

Từ đó ta được:

$$\overrightarrow{OI}=\frac{b.\overrightarrow{OB}+(a+c).\overrightarrow{OL}}{a+b+c} \text{ và } \overrightarrow{OL}=\frac{a.\overrightarrow{OA}+c.\overrightarrow{OC}}{a+c}, \text{ suy ra:}$$

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}}{a+b+c}\Rightarrow d^2=\left(\frac{a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}}{a+b+c}\right)^2.$$

Do đó ta đi đến:

$$d^2=\frac{1}{4p^2}\times\{(a^2+b^2+c^2)R^2+ab(2R^2-c^2)+$$

$$+bc(2R^2-a^2)+ca(2R^2-b^2)\}=R^2-\frac{abc}{2p}.$$

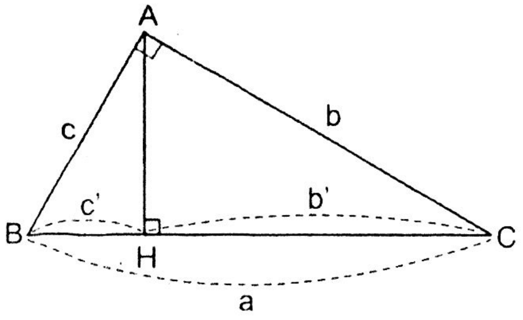
Mặt khác,

$$S=pr=\frac{abc}{4R}\Rightarrow 2Rr=\frac{abc}{2p}$$

nên ta được: $d^2=R^2-2Rr$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 2

1. Trong các công thức sau, công thức nào không đúng ?



(A) $b = \sqrt{a.b'}$; $c = \sqrt{a.c'}$

(B) $h^2 = c'.b'$

(C) $h.a = b.c$

(D) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$

2. (I) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ (II) $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Trong hai công thức trên:

(A) (I) đúng và (II) sai. (B) (II) đúng và (I) sai.

(C) Cả hai đúng. (D) Cả hai sai.

3. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài ba trung tuyến xuất phát từ A, B, C và a, b, c là độ dài ba cạnh đối tương ứng của ba đỉnh A, B, C trong tam giác ABC. Ta có:

(A) $4m_a^2 = 2(b^2 - c^2) - a^2$; (B) $m_b^2 = -\frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}(a^2 + c^2)$;

(C) $m_c^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$; (D) Tất cả các câu trên đều sai.

4. Tìm công thức sai:

(A) $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$

(B) $S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}bc.\sin A$

(C) $S = \frac{abc}{R}$; $S = p.r$

(D) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

5. (I) Giải tam giác là tìm cách xác định các yếu tố còn lại của tam giác (các góc và các cạnh còn lại) theo ba yếu tố đã biết.

(II) Ta thường vận dụng định lí cosin, định lí sin để giải tam giác.

(III) Khi cho trước ba yếu tố, ta chắc chắn xác định được ba yếu tố còn lại.

Trong các câu trên:

(A) Cả ba đều đúng. (B) Cả ba đều sai.

(C) Chỉ có một câu đúng. (D) Chỉ có một câu sai.

6. Cho đường tròn tâm O và một điểm M.

(I) Nếu có cát tuyến MAB thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

(II) Nếu M ở ngoài đường tròn, biết độ dài tiếp tuyến MT thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2$.

(III) $\mathscr{P}_{M/(O)} = 0$ khi và chỉ khi M nằm trên (O).

Trong ba câu trên:

(A) Chỉ có một câu đúng. (B) Chỉ có hai câu đúng.

(C) Cả ba câu đều đúng. (D) Tất cả các câu trên đều sai.

7. Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm M cố định. Một đường thẳng (d) đi qua M, cắt đường tròn tại hai điểm A và B.

(I) Tích MA.MB không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng (d), chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm M.

(II) Tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ là một số không đổi, và

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = R^2 - d^2.$$

(A) Cả hai câu trên đều đúng.

(B) Cả hai câu trên đều sai.

(C) (I) đúng và (II) sai.

(D) (I) sai và (II) đúng.

8. Biết rằng tam giác ABC có góc A = 23^0, a = 14. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng (hoặc gần bằng):

(A) 17,915 ; (B) 2,735 ; (C) 5,470 ; (D) 322.

9. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại một điểm M. Khi đó, bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn nếu và chỉ nếu MA.MB = MC.MD.

(A) Phát biểu trên luôn luôn đúng trong mọi trường hợp.

(A) Phát biểu trên luôn luôn sai trong mọi trường hợp.

(C) Phát biểu trên chính là định lí phương tích.

(D) Phát biểu trên không đúng trong một số trường hợp.

10. Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn

(A) là một đường tròn.

(B) là tập rỗng.

(A) là một đường thẳng song song với đường nối tâm.

(D) là một đường thẳng vuông góc với đường nối tâm.

11. Cho đường tròn (O, R) và một điểm P. Vẽ qua P hai cát tuyến PAB và PCD với đường tròn. Đẳng thức nào sau đây không luôn đúng ?

(A) $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD}$; (B) PA.PB = PC.PD ;

(C) $PA.PB = PO^2 - R^2$; (D) $PA.PB = |PO^2 - R^2|$.

12. Cho hai đường tròn đồng tâm, có bán kính khác nhau.

(A) Trục đẳng phương của chúng là đường thẳng đi qua tâm.

(B) O là điểm đẳng phương của hai đường tròn.

(C) Trục đẳng phương của chúng là đường thẳng không đi qua tâm.

(D) Tất cả các câu trên đều sai.

13. Giả sử có 3 đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) có các tâm tương ứng là O_1, O_2 và O_3 không thẳng hàng. Lúc đó:

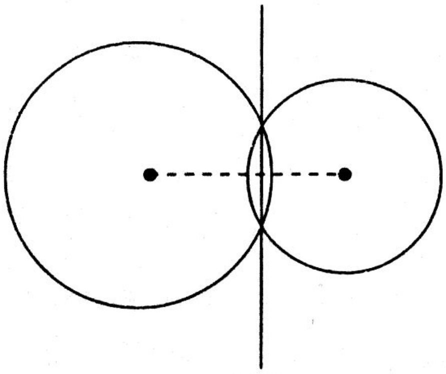
(A) Có ít nhất hai trục đẳng phương của 3 cặp đường tròn song song nhau.

(B) Có ít nhất hai trục đẳng phương của 3 cặp đường tròn trùng nhau.

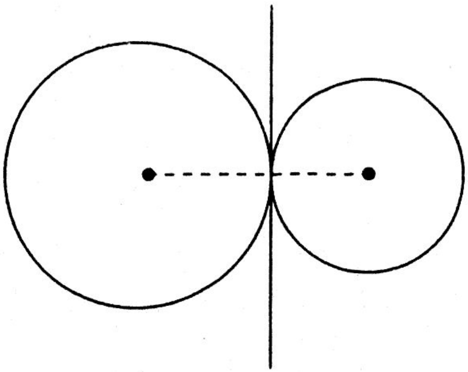
(C) Ba trục đẳng phương của 3 cặp đường tròn đồng quy tại một điểm. Ta gọi điểm này là *tâm đẳng phương* của 3 đường tròn.

(D) Tất cả các câu trên đều sai.

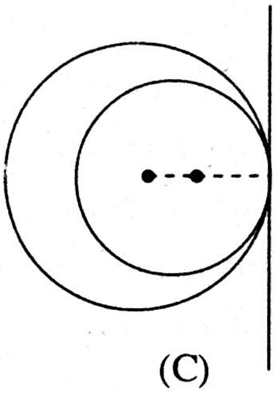
14. Đường thẳng nét liền nào trong các hình sau không phải là trục đẳng phương của hai đường tròn đã cho ?



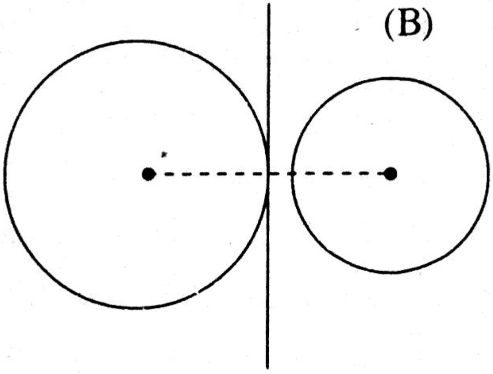
(A)



(B)



(C)



(D)

15. Tam giác ABC có $b = 12$, $c = 23$, góc $A = 30^0$. Diện tích tam giác bằng (hoặc gần bằng):

(A) 97,580 ; (B) 119,511 ; (C) 138 ; (D) 69.

16. Cho tam giác có $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$. Góc A bằng:

(A) 30^0 ; (B) 45^0 ; (C) 60^0 ; (D) 120^0.

17. Cho tam giác có $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$. Diện tích tam giác là

(A) 10 ; (B) $10\sqrt{3}$; (C) $20\sqrt{3}$; (D) 20.

18. Cho tam giác có $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$. Trung tuyến m_a bằng

(A) $\frac{129}{4}$; (B) $\frac{129}{2}$; (C) $\frac{\sqrt{129}}{4}$; (D) $\frac{\sqrt{129}}{2}$.

19. Tam giác ABC có diện tích S, E là một điểm trên BC sao cho $EC = 3EB$. Diện tích tam giác ABE bằng

(A) $\frac{1}{3}S$; (B) $\frac{1}{4}S$; (C) $\frac{3}{4}S$; (D) $\frac{1}{9}S$.

20. Trong tam giác ABC bất kì ta có:

(A) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$;

(B) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$;

(C) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{8}(a^2 + b^2 + c^2)$;

(D) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

21. Tam giác ABC có $b = 7$, $c = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Chiều cao h_a là

(A) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; (B) $2\sqrt{2}$; (C) $\frac{7}{\sqrt{2}}$; (D) $3\sqrt{2}$.

22. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Biết AB = 5 cm ; AC = 12cm. Tính AH (bằng hoặc gần bằng).

(A) 0,600 ; (B) 4,615 ; (C) 0,416 ; (D) 13.

23. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Biết AH = 5m ; HB = 7m. Tính CH (bằng hoặc gần bằng).

(A) 4,723 ; (B) 4,552 ; (C) 2,331 ; (D) 3,571.

24. Biết các góc $A = 20^0$; $C = 60^0$, AC = 10. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng (hoặc gần bằng)

(A) 5,773 (B) 14,619 (C) 5,077 (D) 11.

25. Bộ ba số nào sau đây là độ dài ba cạnh của một tam giác ?

(A) 3 ; 7 ; 12 ; (B) 13 ; 7 ; 19 ;

(C) 14,1 ; 11,2 ; 27,4 ; (D) 3 ; 3 ; 7.

26. Tam giác ABC có góc $B = 30^0$, AB = 4. Độ dài h_a bằng (hoặc gần bằng)

(A) 3,464 ; (B) 2 ; (C) 0,5 ; (D) 8.

27. Công thức tính đường cao h_a nào sau đây đúng ?

(A) RsinA ; (B) csinB ; (C) $\frac{S}{2a}$; (D) $\frac{S}{a}$.

28. Tam giác có cạnh nào sau đây là tam giác tù ?

(A) a = 7 ; b = 5 ; c = 8 ; (B) a = 23,4 ; b = 16,5 ; c = 34,3 ;

(C) a = 11,4 ; b = 13, 7 ; c = 10,1 ; (D) a = 27 ; b = 25 ; c = 19.

29. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Biết AB = 7 m và BC = 11m. Tính BH (bằng hoặc gần bằng).

(A) 4,454 m ; (B) 38 m ; (C) 77 m ; (D) 0,636 m.

30. Tam giác ABC có b = 7, c = 5 và cosA = $\frac{3}{5}$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp R bằng:

(A) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; (B) $\frac{5}{\sqrt{2}}$; (C) $\frac{7}{\sqrt{2}}$; (D) $\frac{9}{\sqrt{2}}$.

31. Tam giác ABC có diện tích S, E là trung điểm cạnh BC. Diện tích tam giác ABE bằng:

(A) $\frac{1}{3}$S ; (B) $\frac{1}{4}$S ; (C) $\frac{3}{4}$ S ; (D) $\frac{1}{2}$ S.

32. Tam giác ABC có diện tích S. Gọi E, F lần lượt ở trên AB, AC sao cho AB = 3AE ; AC = 2AF. Diện tích tam giác AEF bằng

(A) $\frac{1}{2}$S ; (B) $\frac{1}{3}$S ; (C) $\frac{1}{6}$S ; (D) $\frac{2}{3}$ S.

33. Điền số thích hợp vào các ô trống, với a, b, c và A, B, C là các cạnh và các góc của một tam giác theo kí hiệu thông thường.

a	b	c	A	B	C
85 m	52,1m	54 m			
5 cm	8 cm				120^0
	8 dm	13 dm	130^0		
35 cm		12 cm		36^0	
	137,5 cm		83^0		57^0

34. Hai dây cung AB và CD của đường tròn (O) cắt nhau tại I. Biết IA = 12, IB = 16. Tính phương tích $\mathscr{P}_{I/(O)}$ của I đối với đường tròn (O).

(A) 192 ; (B) – 192 ; (C) 112 ; (D) – 112.

35. Hai dây cung AB và CD của đường tròn (O) kéo dài cắt nhau tại I. Biết IA = 12, IB = 18. Tính phương tích $\mathscr{P}_{I/(O)}$.

(A) 216 ; (B) – 216 ; (C) 180 ; (D) – 180.

36. Hai dây cung AB và CD của đường tròn (O) cắt nhau tại I. Biết IA = 15, IB = 20 và CD = 40. Tính IC và ID.

(A) 10 và 30 ; (B) -10 và 30 ;

(C) 15 và 25 ; (D) -15 và 25.

37. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt đường thẳng AB tại M sao cho MA = 4, MB = 9. Biết MO = $2\sqrt{10}$, bán kính đường tròn bằng

(A) $\sqrt{5}$; (B) 4 ; (C) $\sqrt{3}$; (D) 2.

38. Cho hai đường tròn (O, 13), (I, 5). Gọi AB là một đường kính của (I) sao cho A, B ở trên (O). Khoảng cách giữa I và O bằng

(A) 7 (B) 12 (C) 18 (D) 19.

39. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, M là một điểm trên đường thẳng AB, ngoài đoạn AB. Từ M kẻ tiếp tuyến MT, MT' lần lượt tới đường tròn (O), (O'). Mệnh đề nào sau đây đúng ?

(A) MT = MT' ;

(B) $MT^2 = \overline{MA}.\overline{BM}$;

(C) Đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB tiếp xúc với OA ;

(D) Tất cả các câu trên đều sai.

40. Cho hai đường tròn (O, 12), (I, 5). Gọi AB là một đường kính của (I) sao cho A, B ở trên (O). Phương tích của I đối với (O) bằng

(A) -4 ; (B) -9 ; (C) -25 ; (D) 25.

41. Cho tam giác ABC .Khi đó:

(A) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$.

(B) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$.

(C) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 - b^2 > c^2$.

(D) Cả ba câu trên đều sai.

42. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

(I) sinA = sinBcosC + sinCcosB ;

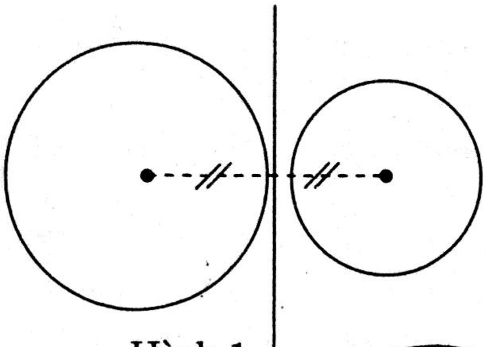
(II) h_a = 2RsinBsinC (h_a là đường cao kẻ từ A).

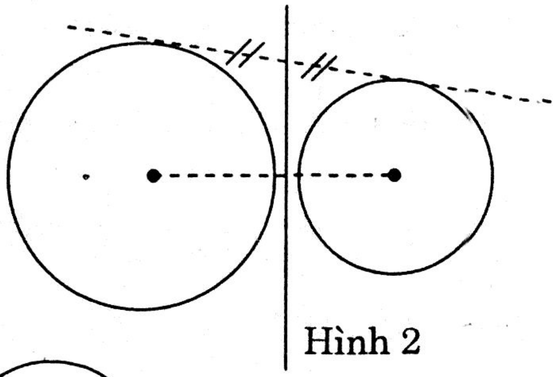
Trong hai đẳng thức trên:

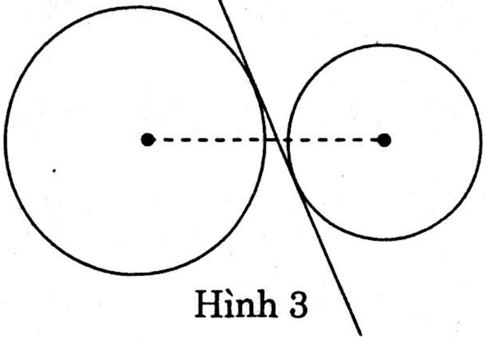
(A) (I) đúng và (II) sai. (B) (II) đúng và (I) sai.

(C) Cả hai cùng sai. (D) Cả hai cùng đúng.

43. Trong các hình sau, đường thẳng liền nét ở hình nào là trục đẳng phương của hai đường tròn đã cho ?


Hình 1


Hình 2


Hình 3

(A) Hình 1 ; (B) Hình 2 ; (C) Hình 3 ;

(D) Cả ba đều đúng.

44. Cho tứ giác lồi ABCD, gọi α là góc hợp bởi hai đường chéo AC và BD. Diện tích S của tứ giác cho bởi công thức:

(A) $S = \frac{1}{2}AC.BD\sin\alpha$ (B) $S = \frac{1}{2}AC.BD\cos\alpha$

(C) $S = \frac{1}{2}BC.AD\sin\alpha$ (B) $S = \frac{1}{2}BC.AD\cos\alpha$.

45. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c}$. Một học sinh lập luận:

(I) Ta có $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \Leftrightarrow c^2m_c^2 = b^2m_b^2$.

(II) Thay công thức trung tuyến vào, đẳng thức trên tương đương với:

$$c^2\left(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) = b^2\left(\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4$$

$$\Leftrightarrow 2a^2(c^2 - b^2) = (c^2 - b^2)(c^2 + b^2). \quad (1)$$

(III) Từ (1) ta suy ra $2a^2 = b^2 + c^2$.

Lập luận trên:

(A) Sai từ giai đoạn (I). (B) Sai từ giai đoạn (II).

(C) Sai ở giai đoạn (III). (D) Đúng hoàn toàn.

46. Cho hai tam giác AKI và ABC có góc A chung, với K nằm trên cạnh AB, I nằm trên AC. Khi đó:

(A) $\frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \frac{AK.AI}{4AB.AC}$ (B) $\frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \frac{2AK.AI}{3AB.AC}$

(C) $\frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \frac{AK}{AC}$ (D) $\frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \frac{-AK.AI}{-AB.AC}$.

47. Cho tam giác ABC biết: $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$. Suy ra các góc:

(A) $A \approx 45^0$, $B \approx 60^0$, $C \approx 75^0$.

(B) $A \approx 46^0$, $B \approx 64^0$, $C \approx 70^0$.

(C) $A \approx 36^0$, $B \approx 64^0$, $C \approx 80^0$.

(D) $A \approx 36^0$, $B \approx 54^0$, $C \approx 90^0$.

48. Cho tam giác ABC biết: $c = 15$, $b = 11$, góc $A = 45^0$. Tính a.

(A) $a \approx 12{,}5$ (A) $a \approx 8{,}9$ (A) $a \approx 10{,}6$ (A) $a \approx 9{,}62$.

49. Giải tam giác ABC biết góc $A = 60^0$, góc $B = 45^0$ và $b = 4$.

(A) $a \approx 3{,}5$; $c \approx 5{,}5$. (A) $a \approx 3$; $c \approx 7$.

(A) $a \approx 8{,}5$; $c \approx 9$. (A) $a \approx 1{,}2$; $c \approx 4{,}5$.

50. Cho tam giác ABC biết góc $B = 60^0$, $c = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$. Lúc đó:

(A) $C = 60^0$; $A = 60^0$. (B) $C = 45^0$; $A = 75^0$.

(A) $C = 30^0$; $A = 90^0$. (B) $C = 40^0$; $A = 80^0$.

51. Tính đường cao kẻ từ C của tam giác ABC, cho biết

$$\widehat{BCA} = 110^0,\ \widehat{CAB} = 35^0,\ BC = 4\text{ cm}.$$

(A) 2,312cm (B) 3,759cm (C) 4,207cm (D) 5cm.

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. D	2. C	3. B	4. C	5. D	6. C	7. C	8. A
9. D	10. D	11. C	12. D	13. C	14. D	15. C	16. C
17. B	18. D	19. B	20. B	21. C	22. B	23. D	24. C
25. B	26. B	27. C	28. B	29. A	30. B	31. D	32. C
33. Dòng 1: $A = 106^0 27'$; $B = 36^0$; $C = 37^0 33'$. Dòng 2: $c = \sqrt{129}$ cm ; $A = 22^0 24'$; $B = 37^0 36'$. Dòng 3: $a = 9{,}9$ dm ; $B = 37^0 56'$; $C = 12^0 04'$. Dòng 4: $b = 26{,}25$ cm ; $A = 128^0 28'$; $C = 15^0 32'$. Dòng 5: $a = 178{,}2$ cm ; $c = 150{,}5$ cm ; $B = 50^0$.							
34. B	35. A	36. A	37. D	38. B	39. A	40. C	41. A
42. D	43. B	44. A	45. C	46. D			
47. B	48. C	49. A	50. B	51. B			

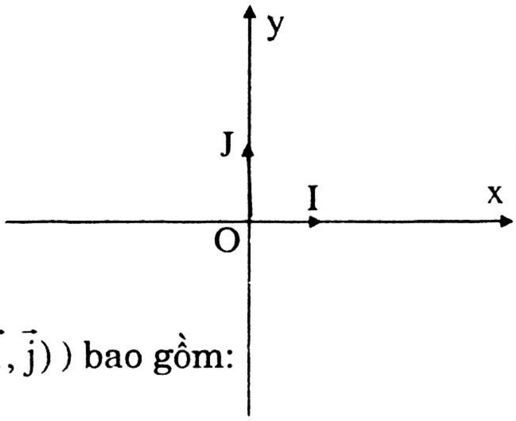
Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

---

§ 1. TỌA ĐỘ VECTƠ, TỌA ĐỘ ĐIỂM

1.1. Tóm tắt kiến thức cần nhớ



- *Hệ trục toạ độ*

Một *hệ trục toạ độ* Oxy (hay $(O; \vec{i}, \vec{j})$) bao gồm:

- Điểm O gọi là *gốc toạ độ*.
- Hai đường thẳng Ox và Oy vuông góc với nhau.
- Một điểm I trên tia Ox, một điểm J trên Oy sao cho:

$$OI = OJ = 1 \text{ đơn vị dài.}$$

Ta kí hiệu $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ và $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Theo tính chất vectơ ta luôn có: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = 0$.

Đường thẳng Ox và Oy lần lượt được gọi là *trục hoành* và *trục tung*.

- *Toạ độ của vectơ*

Đối với hệ toạ độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, nếu vectơ $\vec{a}$ có thể viết dưới dạng: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số (x; y) được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ và kí hiệu $\vec{a} = (x; y)$ hay $\vec{a}(x; y)$. Số thứ nhất x được gọi là *hoành độ*, số thứ hai y được gọi là tung độ của vectơ $\vec{a}$.

- *Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ*

Cho $\vec{a} = (x;y)$ và $\vec{b} = (x';y')$, ta có:

1) $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$;

2) $k\vec{a} = (kx; ky)$;

3) $\vec{a}\vec{b} = xx' + yy'$;

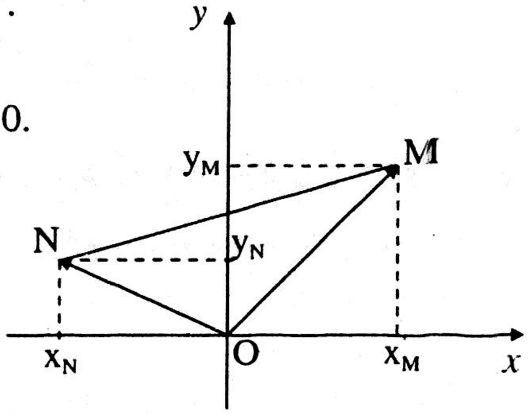
4) Với $x' \neq 0$, $y' \neq 0$, $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'};$$

5) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$;

6) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{x.x' + y.y'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

* Đặc biệt, ta có: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.



- *Toạ độ của điểm*

  Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ cũng được gọi là toạ độ của điểm M. Cho hai điểm $M(x_M ; y_M)$ và $N(x_N ; y_N)$, khi đó:

  i) $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M ; y_N - y_M)$;

  ii) $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.

- *Toạ độ của trung điểm một đoạn thẳng và toạ độ của trọng tâm tam giác*

  M là trung điểm AB khi và chỉ khi toạ độ của M là trung bình cộng các toạ độ tương ứng của hai điểm A, B.

  G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi toạ độ của G là trung bình cộng các toạ độ tương ứng của ba đỉnh A, B, C.

1.2. Một số dạng toán

Bài 1. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm

$$A = (1 ; 3),\ B = (4 ; 2).$$

a) Tìm tọa độ điểm D nằm trên trục Ox và cách đều hai điểm A, B.

b) Tính chu vi và diện tích của tam giác OAB.

c) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác OAB.

d) Đường thẳng AB cắt trục Ox và Oy lần lượt tại M và N. Các điểm M và N chia đoạn thẳng AB theo các tỉ số nào ?

e) Phân giác trong của góc AOB cắt AB tại điểm E. Tìm tọa độ của E.

Giải

a) Vì D nằm trên Ox, nên D = (x_D ; 0).

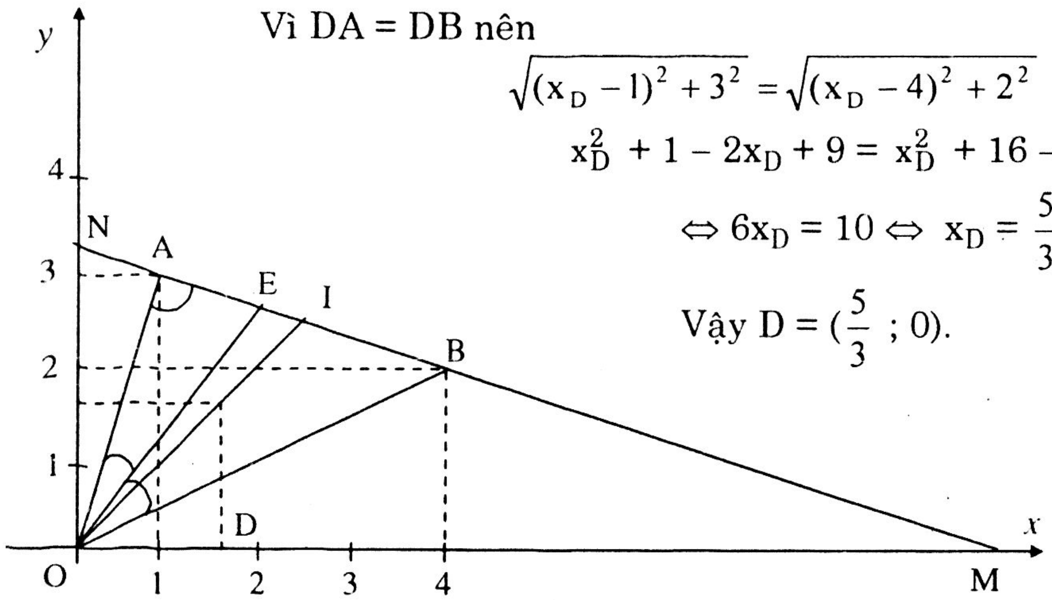
Vì DA = DB nên

$$\sqrt{(x_D-1)^2+3^2}=\sqrt{(x_D-4)^2+2^2} \text{ hay}$$

$$x_D^2+1-2x_D+9=x_D^2+16-8x_D+4$$

$$\Leftrightarrow 6x_D=10 \Leftrightarrow x_D=\frac{5}{3}.$$

Vậy D = ($\frac{5}{3}$; 0).



b) $OA=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$; $OB=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$;

$$AB=\sqrt{(4-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}.$$

Dễ thấy $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 20$, vậy tam giác OAB là tam giác vuông cân tại đỉnh A. Chu vi của tam giác là:

$$OA + OB + AB = 2\sqrt{10}+\sqrt{20}.$$

Diện tích tam giác là: $\frac{1}{2}$OA.AB = 5 (đvdt).

c) Trung điểm I của cạnh AB có tọa độ

$$I=\left(\frac{1+4}{2}\ ;\ \frac{3+2}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right).$$

Vì $\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OI}$, nên $G=\left(\frac{2}{3}.\frac{5}{2}\ ;\ \frac{2}{3}.\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{3}\ ;\ \frac{5}{3}\right)$.

d) M ∈ Ox nên M = (x_M ; 0). Do đó $\overrightarrow{MA}=(1-x_M\ ;\ 3)$ và $\overrightarrow{MB}=(4-x_M\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$, tức là:

$$\begin{cases}1-x_M=k(4-x_M)\\ 3=k.2\end{cases}.$$

Giải hệ trên ta được $k=\frac{3}{2}$.

Vậy M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{3}{2}$.

Tương tự ta có: N chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{1}{4}$.

e) Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có

$$\frac{EA}{EB} = \frac{OA}{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vì điểm E nằm giữa hai điểm A, B nên $\overrightarrow{EA} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{EB}$. Như vậy điểm E chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tọa độ của điểm E là:

$$x_E = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.4}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -2 + 3\sqrt{2}\ ;\ y_E = \frac{3 + \frac{\sqrt{2}}{2}.2}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4 - \sqrt{2}.$$

Bài 2. Cho ba điểm A = (4 ; 6), B = (5 ; 1), C = (1 ; –3).

a) Tính chu vi của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và bán kính đường tròn đó.

Giải

a)
$$AB = \sqrt{(5-4)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{26},$$
$$AC = \sqrt{(1-4)^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10},$$
$$BC = \sqrt{(1-5)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Như vậy chu vi tam giác ABC là $\sqrt{26} + 3\sqrt{10} + 4\sqrt{2}$.

b) Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là I(x ; y).

Ta có: IA = IB = IC hay:

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}.$$

Giải hệ phương trình trên tìm được:

$$x = -\frac{1}{2}\ ;\ y = \frac{5}{2} \text{ và } IA = IB = IC = \frac{\sqrt{130}}{2}.$$

Vậy tâm $I = (-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{2})$; bán kính $R = \frac{\sqrt{130}}{2}$.

Bài 3. Cho ba điểm

A(–4; 1), B(2; 4), C(2; –2).

a) Ba điểm A, B, C có lập thành tam giác không?

b) Tìm toạ độ của trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra ba điểm đó thẳng hàng.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (6; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -6)$, hai vectơ này không cùng phương nên ba điểm A, B, C lập thành một tam giác.

b) Trọng tâm của ΔABC là

$$G\left(\frac{-4+2+2}{3}; \frac{1+4-2}{3}\right) \text{ hay } G(0; 1).$$

Điểm H(x; y) là trực tâm ΔABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 & (2) \end{cases}.$$

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (x + 4; y - 1)$, $\overrightarrow{BC} = (0 ; -6)$, $\overrightarrow{BH} = (x - 2 ; y - 4)$, $\overrightarrow{AC} = (6 ; -3)$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow -6(y - 1) = 0,\ y = 1$ và

$(2) \Leftrightarrow 6(x - 2) - 3(y - 4) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 2) - y + 4 = 0.$

Thay y = 1 ta được $x = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$. Vậy $H(\frac{1}{2}; 1)$.

Điểm I(x; y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} IA = IB & (3) \\ IB = IC & (4) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 & (3') \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 & (4') \end{cases}.$$

Từ (4') suy ra $y - 4 = -y - 2$, $y = 1$. Thay y = 1 vào (3') ta được $(x + 4)^2 = (x - 2)^2 + 9$, giải ra ta được: $x = -\frac{1}{4}$. Vậy $I(-\frac{1}{4}; 1)$.

Từ đó ta có $\overrightarrow{GH} = (\frac{1}{2}; 0)$, $\overrightarrow{GI} = \left(-\frac{1}{4}; 0\right)$, suy ra

$$-2\overrightarrow{GI} = \left(\frac{1}{2}; 0\right) = \overrightarrow{GH}.$$

Hai vectơ $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GI}$ cùng phương nên G, I, H thẳng hàng.

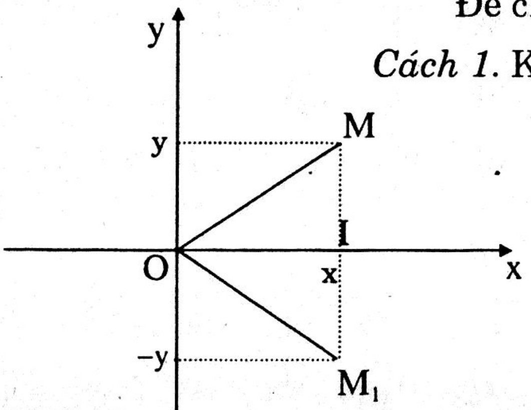
Chú ý. Để tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, có thể xác định hai trung điểm P, Q của BC, AC rồi xác định tọa độ của I từ hệ thức:

$$\begin{cases}\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{IQ}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}.$$

Bài 4. Cho điểm M(x; y), tìm toạ độ của điểm M_1 đối xứng với M qua trục Ox.

Giải

Bằng hình vẽ, có thể thấy tọa độ của M_1 là (x; –y).



Để chứng minh chặt chẽ, ta tiến hình như sau:

Cách 1. Khi M ∈ Ox thì M_1 và M trùng nhau.

Khi M(x; y) không thuộc Ox, không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc góc phần tư thứ nhất, khi đó $M_1(x_1; y_1)$ thuộc góc phần tư thứ tư như hình vẽ. Ta có Ox là trung trực của MM_1 nên suy ra $x = x_1$ và $y = -y$.

Cách 2. $M_1(x_1; y_1)$ đối xứng với M qua trục Ox khi và chỉ khi

$$\begin{cases}(\vec{i};\overrightarrow{OM})=(\vec{i};\overrightarrow{OM_1}) & (1)\\ \left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|\overrightarrow{OM_1}\right| & (2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{i}.\overrightarrow{OM}=\vec{i}.\overrightarrow{OM_1}\\ \left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|\end{cases}.$$

Từ đó, vì O nằm giữa M_1 và M nên $x = x_1$, $y_1 = -y$.

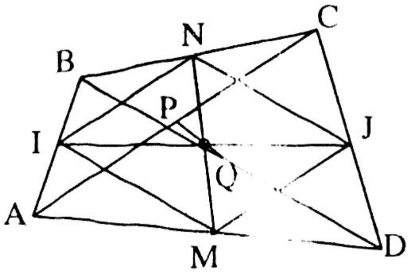
Đặc biệt, khi M ∈ Ox thì M_1 và M trùng nhau.

Bài 5. Cho bốn điểm A, B, C, D. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi P, Q là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD; M và N là trung điểm các đoạn thẳng AD và BC. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng IJ, PQ và MN có chung trung điểm.

Chú ý: Có thể chỉ ra các hình bình hành rồi dùng tính chất hai đường chéo để chứng minh, cách làm này các bạn thường làm ở các lớp 8, 9. Ở đây, ta dùng phương pháp tọa độ.

Giải

Áp dụng công thức tính tọa độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm, Ta có:



$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} \; ; \; x_Q = \frac{x_B + x_D}{2} \; ;$$

$$x_M = \frac{x_A + x_D}{2} \; ; \; x_N = \frac{x_B + x_C}{2} \; ;$$

$$y_P = \frac{y_A + y_C}{2} ; \; y_Q = \frac{y_B + y_D}{2} ;$$

$$y_M = \frac{y_A + y_D}{2} \; ; \; y_N = \frac{y_B + y_C}{2} .$$

Từ đó tính ra toạ độ trung điểm của các đoạn thẳng IJ, PQ, MN đều bằng $\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{2} \; ; \; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{2}\right)$. Do vậy các trung điểm của ba đoạn thẳng đó trùng nhau.

Bài 6. Cho $\vec{a} = (3 \; ; \; 7)$ và $\vec{b} = (-3 \; ; \; -1)$.

Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$, $\cos(\vec{a} + \vec{b} ; \vec{a} - \vec{b})$ và $\cos(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})$.

Giải

Từ công thức: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$ ta được $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{-16}{\sqrt{580}}$.

Vì $\vec{a} + \vec{b} = (0 \; ; \; 6)$ và $\vec{a} - \vec{b} = (6 \; ; \; 8)$ nên

$$\cos(\vec{a} + \vec{b} \; ; \; \vec{a} - \vec{b}) = \frac{0.6 + 6.8}{\sqrt{36}.\sqrt{100}} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5} \; ;$$

$$\cos\,(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) = \frac{\vec{a}.(\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a}|.|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{58}} .$$

Bài 7. Tính diện tích một tam giác có ba đỉnh có toạ độ

(0 ; 0), (3 ; 1), và (−1 ; 3).

Hướng dẫn

Đáp số: 5.

Cách 1. Giả sử O(0 ; 0), B(3 ; 1), và C(−1 ; 3).

Dễ thấy OB = OC = $\sqrt{10}$ và $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$.

Cách 2. Có thể tính ba cạnh rồi dùng công thức Heron.

Cách 3. Có thể dùng công thức sau đây, tính diện tích một tam giác ABC bất kì:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}.$$

Công thức này được chứng minh như sau:

Từ công thức $S = \frac{1}{2}bc.\sin A$, suy ra

$4S^2 = b^2.c^2.\sin^2 A = AC^2.AB^2(1 - \cos^2 A)$

$= AC^2.AB^2 - AC^2.AB^2\cos^2 A = AC^2.AB^2 - (AC.AB.\cos A)^2$

$= \overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2.$

Bài 8. Cho ΔABC trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, biết A(–1; 2); B(2; 0); C(–3; 1). Tìm điểm M trên BC sao cho

$$S(\Delta ABM) = \frac{1}{3}S(\Delta ABC).$$

Hướng dẫn

Giả sử M(x, y) là điểm trên BC sao cho

$$S(\Delta ABM) = \frac{1}{3}S(\Delta ABC).$$

Kẻ AH ⊥ BC ta có: $S(\Delta ABM) = \frac{1}{2}.BM.AH$, $S(\Delta ABC) = \frac{1}{2}.BC.AH$.

Suy ra $\frac{1}{2}.BM.AH = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}.BC.AH)$. Từ đó,

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}.$$

Sau cùng, từ đẳng thức vectơ trên, dễ dàng tính được M(1/3; 1/3).

Bài 9. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho tứ giác OBCD biết O(0; 0), B(2; 4), C(6; 6) và D(9; 0). Cho điểm M(4; 5).

a) Có nhận xét gì về điểm M ?

b) Xác định điểm E trên trục Ox sao cho

$$S(\Delta MOE) = S(OBCD).$$

Giải

a) Ta có:

$$\frac{x_B + x_C}{2} = x_M,\ \frac{y_B + y_C}{2} = y_M$$

nên M chính là trung điểm đoạn thẳng BC.

b) Dễ thấy ΔOME có đường cao MH = 5 nên để có

$$S(\Delta MOE) = S(OBCD),$$

đỉnh E buộc phải ở ngoài cạnh (OD). Giả sử E(x ; 0). Dễ thấy

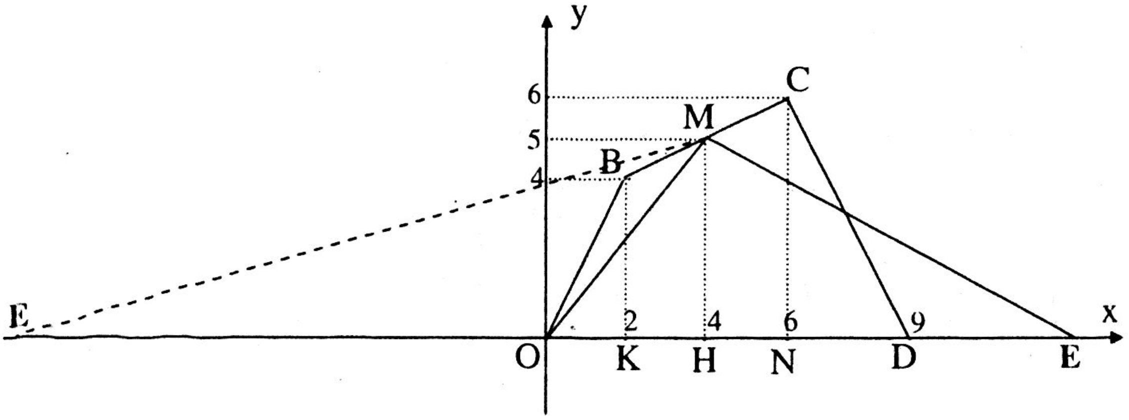
$$S(\Delta MAE) = \frac{5}{2}|x|.$$

Mặt khác, diện tích tứ giác OBCD bằng tổng diện tích hai tam giác vuông OBK, CND và diện tích hình thang vuông KBCN.

Do đó $S(OBCD) = \frac{1}{2}.2.4 + \frac{1}{2}.(4+6).4 + \frac{1}{2}3.6 = 33$. Suy ra

$$\frac{5}{2}|x| = 33 \text{ hay } |x| = 13{,}2.$$

Vậy E có tọa độ là (13,2 ; 0) hoặc (−13,2 ; 0).



P1. Tìm tọa độ của các vectơ sau:

$$\vec{p} = -\vec{i},\ \vec{q} = 5\vec{j},\ \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j};$$

$$\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j},\ \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j},$$

$$\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{j} - \vec{i}),\ \vec{e} = 0{,}15\vec{i} + 1{,}3\vec{j},\ \vec{f} = \pi\vec{i} - \vec{j}\cos 24^{\circ}.$$

P2. Cho ba điểm M(−1; −2), N(3; 2), P(4; −1).

a) Chứng minh rằng ba điểm đó là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm chu vi tam giác MNP.

c) Tính độ dài đoạn trung tuyến của tam giác kẻ từ M.

d) Tìm điểm E trên Ox sao cho $|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

P3. Cho $\vec{a}=(x; y)$. Chứng minh rằng các tích vô hướng $\vec{a}\vec{i}$ và $\vec{a}\vec{j}$ lần lượt bằng hoành độ và tung độ của vectơ $\vec{a}$ trong mặt phẳng toạ độ.

P4. Cho $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$, $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$.

a) Tìm những giá trị của k để hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương.

b) Tìm những giá trị của k để $\vec{u}\perp\vec{v}$.

c) Tìm những giá trị của k để $|\vec{v}|=|\vec{u}|$.

P5. Cho các vectơ $\vec{a}=(3\ ;\ 2), \vec{b}=(-1\ ;\ 5)\ ;\ \vec{c}=(-2\ ;\ -5)$.

a) Tìm tọa độ các vectơ

$$\vec{u}=2\vec{a}+\vec{b}-4\vec{c},\ \vec{v}=-\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c},\ \vec{w}=2(\vec{a}+\vec{b})+4\vec{c}.$$

b) Tìm các số p, q sao cho $\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$.

P6. Cho ba điểm A = (-1 ; 1), B = (1 ; 3), C = (-2 ; 0).

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn thẳng BC, điểm B chia đoạn thẳng AC và điểm C chia đoạn thẳng AB.

P7. Trong mặt phẳng toạ độ cho ba điểm

A(–1; 4), B(–1; 8); C(3; 8).

a) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?

b) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông ở B.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC và góc AGC.

P8. Trong mặt phẳng Oxy cho A(1; 1); B(3; 3) và C(2; 0)

Tính diện tích tam giác ABC.

P9. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy cho ΔOBC với O(0; 0); B(2; 4), C(6; 0). Hãy xác định M, N, P, Q sao cho M nằm trên cạnh OB, N nằm trên cạnh BC, các điểm P, Q nằm trên cạnh OC, sao cho tứ giác MNPQ là hình vuông.

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT, PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ VÀ CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

2.1. Tóm tắt kiến thức cần nhớ

- *Phương trình tổng quát của đường thẳng*

Véctơ $\vec{n}$ khác vectơ $\vec{0}$ và vuông góc với đường thẳng Δ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của đường thẳng Δ. Như vậy, mỗi đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến, những vectơ pháp tuyến này song song nhau. Cho một điểm $M(x_0; y_0)$ và một vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$. Có duy nhất một đường thẳng đi qua M và nhận $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến.

Điều kiện cần và đủ để điểm N(x; y) nằm trên đường thẳng Δ đi qua $M(x_0, y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng là tập hợp những điểm có toạ độ (x; y) thoả mãn phương trình bậc nhất đối với hai ẩn số $Ax + By + C = 0$, với A, B không đồng thời bằng không. Phương trình

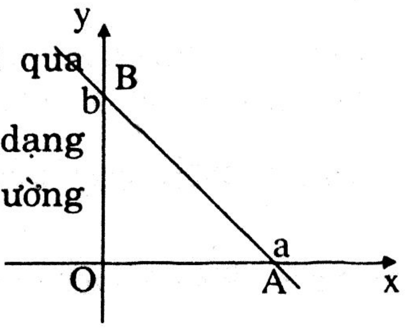
$$Ax + By + C = 0$$

được gọi là *phương trình tổng quát* của đường thẳng, đường thẳng này có $\vec{n}(A, B)$ là vectơ pháp tuyến.

- *Các dạng đặc biệt của phương trình đường thẳng*

Đường thẳng $Ax + C = 0$ vuông góc với trục Ox (đường thẳng này nhận $\vec{n}(A, 0)$ làm vectơ pháp tuyến).
Đường thẳng $By + C = 0$ vuông góc với trục Oy (đường thẳng này nhận $\vec{n}(0, B)$ làm vectơ pháp tuyến).
Đường thẳng $A x + By = 0$ đi qua gốc toạ độ (đường thẳng này nhận $\vec{n}(A, B)$ làm vectơ pháp tuyến).

- Nếu $B \neq 0$ thì phương trình của Δ có dạng $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A}$. Khi đó, số $k = -\frac{A}{B}$ gọi là hệ số góc của đường thẳng Δ.



- Đường thẳng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a\neq 0, b\neq 0)$ đi qua hai điểm (a; 0) và (0; b). Phương trình dạng như thế gọi là phương trình của đường thẳng theo đoạn chắn.

Chú ý.

a) Vì đường thẳng Ox đi qua O(0; 0) và vuông góc với $\vec{j}=(0;1)$, tức là có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(0;1)$ nên nó có phương trình $0.(x-0)+1.(y-0)=0$, hay $y=0$.

b) Đường thẳng Oy có phương trình $x=0$ (do Oy qua điểm O(0; 0) và vuông góc với $\vec{i}=(1;0)$).

c) Phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và song song với Ox, với $y_0\neq 0$, là $y-y_0=0$.

d) Đường thẳng đi qua $M(x_0, y_0)$ và vuông góc với Ox sẽ nhận $\vec{i}=(1;0)$ là vectơ pháp tuyến nên nó có phương trình:

$$1.(x-x_0)+0.(y-y_0)=0 \Leftrightarrow x-x_0=0.$$

- *Vị trí tương đối của hai đường thẳng*

Trong mặt phẳng toạ độ cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có phương trình:

$$\Delta_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{1}$$

$$\Delta_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{2}$$

Số điểm chung của hai đường thẳng (nếu có) bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và (2), ta có:

a) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

b) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$, đồng thời $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\neq 0$ hoặc $\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}\neq 0$.

c) Hai đường thẳng trùng nhau khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Đặc biệt khi A_2, B_2, C_2 khác 0, ta có:

* Δ_1, Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$,

* $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$,

* $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

- *Vectơ chỉ phương của đường thẳng*

Mỗi vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ nằm trên đường thẳng Δ hoặc trên đường thẳng song song với đường thẳng Δ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Như vậy, một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương, mỗi vectơ này vuông góc với mọi vectơ pháp tuyến. Nếu $\vec{n}(A; B)$ là một vectơ pháp tuyến thì $\vec{u}(-B; A)$ là một vectơ chỉ phương.

- *Phương trình tham số của đường thẳng*

Hệ phương trình (1) sau đây được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Δ, với tham số t:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0). \qquad (1)$$

Ứng với mỗi giá trị của tham số t, ta tính được x và y từ công thức (1), và có được điểm M(x; y) nằm trên Δ. Ngược lại, nếu điểm M nằm trên Δ thì phải có một số t sao cho toạ độ của điểm M thoả mãn hệ phương trình (1).

Phương trình (1) chính là phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(x_0 ; y_0)$, biết vectơ chỉ phương $\vec{u}(a ; b)$.

- *Phương trình chính tắc của đường thẳng*

Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$. Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$, bằng cách khử tham số t từ hai phương trình trên, ta đi đến phương trình (2) sau đây, được gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng Δ:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \qquad (2)$$

Nếu a = 0, thì phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + bt \end{cases}$.

* Khi đó Δ có phương trình tổng quát: $x - x_0 = 0$ và không có phương trình chính tắc. Tương tự, nếu b = 0 thì Δ có phương trình tổng quát $y - y_0 = 0$ và không có phương trình chính tắc.

Chú ý.

1) Nếu bài toán không đòi hỏi dạng của phương trình đường thẳng, thì tùy từng trường hợp cụ thể, ta nên chọn dạng phương trình đường thẳng mà có thể viết được nhanh nhất.

2) Trong trường hợp cần xác định phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_1 ; y_1)$ và $B(x_2 ; y_2)$, mà bài toán không đòi hỏi dạng của phương trình đường thẳng, ta có thể áp dụng ngay công thức

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Thật vậy, vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 ; y_2 - y_1)$. Vì đường thẳng AB đi qua điểm $A(x_1 ; x_2)$ nên nó có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}.$$

Khử t, dễ dàng có được công thức trên.

2.2. Một số dạng toán

Bài 10. Cho hai điểm

$$M_1(x_1 ; y_1); M_2(x_2 ; y_2),$$

hãy viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng M_1M_2.

Giải

Đường trung trực của M_1M_2 đi qua trung điểm $M_0\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ của M_1M_2 và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{M_1M_2}$. Nó có phương trình là

$$(x_2-x_1)(x-\frac{x_1+x_2}{2}) + (y_2-y_1)(y-\frac{y_1+y_2}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x_2-x_1)x + 2(y_2-y_1)y + x_2^2 - x_1^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0.$$

Bài 11. Trên mặt phẳng, cho hệ tọa độ trực chuẩn *Oxy* và tam giác ABC với đỉnh A(1, 1). Các đường cao hạ từ B và C lần lượt nằm trên các đường thẳng (d_1) và (d_2) theo thứ tự có phương trình:

$$-2x + y - 8 = 0 \text{ và } 2x + 3y - 6 = 0.$$

Hãy viết phương trình đường thẳng chứa đường cao hạ từ A và xác định tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC.

Giải

Đường thẳng d_1 có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (-2,1)$, đường thẳng d_2 có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (2,3)$.

Đường thẳng AB $\perp d_2$, đi qua A(1, 1) và có vector chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{n_2} = (2,3)$ nên có phương trình là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} \Leftrightarrow 3x - 2y = 1.$$

Đỉnh B là giao điểm của AB và d_1 nên có toạ độ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -17 \\ y = -26, \end{cases}$$

do đó $B(-17,-26)$. Đường thẳng AC $\perp d_1$, đi qua A(1, 1) và có vector chỉ phương $\vec{v} = \overrightarrow{n_1} = (-2,1)$ nên có phương trình là:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} \Leftrightarrow x + 2y = 3.$$

Đỉnh C là giao điểm của AC và d_2 nên có toạ độ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases},$$

do đó $C(3,0)$. Giao điểm I của d_1 và d_2 có toạ độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -2x + y = 8 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{9}{4} \\ y = \dfrac{7}{2}, \end{cases}$$

do đó $I\left(-\dfrac{9}{4}, \dfrac{7}{2}\right)$. Vì I là trực tâm của tam giác ABC nên đường thẳng chứa đường cao hạ từ I chính là đường thẳng AI, có phương trình là:

$$\frac{x-1}{-\frac{9}{4}-1} = \frac{y-1}{\frac{7}{2}-1} \Leftrightarrow 10x + 13y = 23.$$

Bài 12. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, biết đỉnh C(4 ; 3), đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh tam giác có phương trình lần lượt là $x + 2y - 5 = 0$ và $4x + 13y - 10 = 0$. Hãy viết phương trình ba cạnh của ΔABC.

Giải

Ta nhận thấy tọa độ điểm C không thoả mãn hai phương trình đã cho nên đường phân giác và trung tuyến không qua C. Giả sử đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A. Từ hai phương trình đã cho, suy ra toạ độ đỉnh A là (9; –2).

* Phương trình cạnh AC là $\dfrac{x-4}{9-4} = \dfrac{y-3}{-2-3}$, hay $x + y - 7 = 0$.

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường phân giác thì C' nằm trên cạnh AB. Ta đi tính toạ độ $C'(x_0 ; y_0)$.

Gọi H là trung điểm của CC', tọa độ H là

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_0 + 4}{2} \\ y_H = \dfrac{y_0 + 3}{2} \end{cases}$$

Vì H nằm trên đường phân giác ($x + 2y - 5 = 0$) kẻ từ A nên $\overrightarrow{C'C}$ cùng phương với vectơ pháp tuyến của đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$, đồng thời toạ độ của H thoả mãn phương trình x + 2y − 5 = 0. Vì lẽ đó nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0 - 4}{1} = \dfrac{y_0 - 3}{2} \\ \dfrac{x_0 + 4}{2} + 2\left(\dfrac{y_0 + 3}{2}\right) - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}.$$

* Đường thẳng AB (đi qua A(9; −2) và C'(2; −1)):

$$\frac{x-2}{9-2} = \frac{y+1}{-1} \Leftrightarrow x + 7y + 5 = 0.$$

Gọi tọa độ B là B(x_1 ; y_1), Vì M là trung điểm của BC nên:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + 4}{2} \\ y_M = \dfrac{y_1 + 3}{2} \end{cases}$$

M thuộc trung tuyến AM nên tọa độ của M thoả mãn phương trình 4x + 13y − 10 = 0, ngoài ra, B(x_1 ; y_1) phải thoả mãn phương trình đường thẳng AB: x + 7y + 5 = 0. Do vậy ta có

$$\begin{cases} 4\left(\dfrac{x_1 + 4}{2}\right) + 13\left(\dfrac{y_1 + 3}{2}\right) - 10 = 0 \\ x_1 + 7y_1 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -12 \\ y_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow B(-12;1)$$

* Đường thẳng BC có phương trình:

$$\frac{x+12}{4+12} = \frac{y-1}{3-1} \Leftrightarrow x - 8y + 20 = 0$$

Vậy ba cạnh tam giác ABC là: AB: x + 7y + 5 = 0,

AC: x + y − 7 = 0, BC: x − 8y + 20 = 0.

Bài 13. Cho tam giác ABC có ba đỉnh thuộc đồ thị (C) của hàm số y = 1/x. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC cũng thuộc đường cong (C).

Giải

Vì ba đỉnh A, B, C thuộc đường cong y = 1/x nên có thể gọi toạ độ ba đỉnh là A(a ; 1/a) ; B(b ; 1/b) ; C(c ; 1/c). Gọi toạ độ trực tâm H của tam giác ABC là H(x_0 ; y_0). Ta có

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Từ hai biểu thức tích vô hướng này, ta đi đến

$$\begin{cases} (x_0 - a)(c - b) + \left(y_0 - \dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right) = 0 \\ (x_0 - b)(c - a) + \left(y_0 - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (c - b)\left(x_0 - \dfrac{1}{bc}y_0 + \dfrac{1}{abc} - a\right) = 0 \\ (c - a)\left(x_0 - \dfrac{1}{ac}y_0 + \dfrac{1}{abc} - b\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - \dfrac{1}{bc}y_0 + \dfrac{1}{abc} - a = 0 \\ x_0 - \dfrac{1}{ac}y_0 + \dfrac{1}{abc} - b = 0 \end{cases}.$$

Trong hệ trên, cộng vế theo vế của hai phương trình và rút gọn, ta được $x_0 = -\dfrac{1}{abc}$, từ đó, $y_0 = -abc$. Suy ra $y_0 = \dfrac{1}{x_0}$.

Vậy $(x_0 ; y_0) \in$ đồ thị hàm số $y = 1/x$.

Bài 14. Cho ΔABC. Giả sử $M(-1; 1)$ là trung điểm cạnh BC. Phương trình đường thẳng chứa cạnh AB và AC lần lượt là

$$x + y = 2 \text{ và } 2x + 6y + 3 = 0.$$

a) Tính toạ độ các đỉnh A, B, C.

b) Viết phương trình đường cao AH của ΔABC.

Hướng dẫn

Kéo dài AM tới D sao cho MA = MD.

Toạ độ điểm A nghiệm đúng hệ hai phương trình $x + y = 2$ và $2x + 6y + 3 = 0$. Suy ra $A(15/4 ; -7/4)$.

Từ đó, tính được tọa độ D. Lập phương trình đường thẳng DB và DC là đường thẳng song song với đường thẳng đã cho và biết tọa độ một điểm của đường thẳng. Giải hệ phương trình giao điểm AB và DB ; AC và DC. Suy ra $B(1/4 ; 7/4)$; $C(-9/4 ; 1/4)$.

Đường cao AH đi qua A và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BC}$. Từ đó, phương trình AH là: $10x + 6y - 27 = 0$.

Có thể tiến hành cách khác: Giả sử B, C có toạ độ $B(x_1 ; y_1)$ và $C(x_1 ; y_2)$. Ta phải lập được 4 phương trình với 4 ẩn x_1; y_1; x_2; y_2. M là trung điểm BC nên viết được hai phương trình tọa độ. Điểm B trên đường thẳng AB và C trên đường thẳng AC cho ta thêm hai phương trình nữa, giải hệ 4 phương trình này để tìm ra 4 ẩn và suy ra toạ độ các điểm B, C. Phương trình AH được tiến hành tương tự như cách trên.

Bài 15. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho ΔABC, biết phương trình cạnh AB là: $5x - 3y + 2 = 0$; phương trình đường cao AH là: $10x + 6y - 27 = 0$, phương trình đường cao BK là: $7x + 2y - 22 = 0$. Hãy lập phương trình các cạnh của tam giác và phương trình đường cao còn lại.

Hướng dẫn

Giải hệ phương trình giao điểm (AB) và (AH) sẽ tìm được tọa độ A, giải hệ (AB) và (BK) sẽ tìm được tọa độ B. Lập phương trình hai cạnh AC và BC khi biết toạ độ một điểm của đường thẳng và vectơ chỉ phương của đường thẳng, vectơ chỉ phương này chính là vectơ pháp tuyến của đường cao tương ứng.

Đáp số: (AC): $-2x + 7y + 5 = 0$;

(BC): $3x - 5y + 14 = 0$; đường cao (CE): $3x + 5y - 23 = 0$.

Bài 16. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho ΔABC với đỉnh A(1; –1) và các đường trung tuyến của ΔABC xuất phát từ B và C lần lượt nằm trên các đường thẳng $x + y = 3$; $x - 3y = 2$.

a) Viết phương trình đường trung tuyến AM của ΔABC.

b) Xác định tọa độ điểm M.

Hướng dẫn

a) Toạ độ trọng tâm G là nghiệm phương trình giao điểm của hai đường trung tuyến. Trung tuyến AM đi qua hai điểm A, G nên có phương trình $5x - 7y - 12 = 0$.

b) Tọa độ điểm M là M(29/8 ; 7/8), tính được từ đẳng thức

$$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = -2(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OM})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA})/2.$$

Bài 17. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho ΔABC với đỉnh A(0 ; –1) và các đường phân giác trong hạ từ B và C lần lượt nằm trên các đường thẳng $-3x + 4y = 7$ và $5x + 3y = -8$.

Viết phương trình đường phân giác góc A.

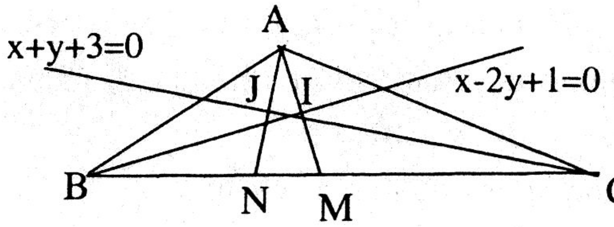
Hướng dẫn

Giao điểm I của hai đường phân giác có tọa độ là nghiệm hệ phương trình hai phân giác. Suy ra $I\left(-\frac{53}{29}; \frac{11}{29}\right)$. Đường phân giác góc A đi qua hai điểm A và I mà ta đã biết toạ độ, từ đó, tính được phương trình của nó là $40x + 53y + 53 = 0$.

Bài 18. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho ΔABC, biết A(2; –1) và phương trình hai đường phân giác trong của góc B và C lần lượt là $x - 2y + 1 = 0$ và $x + y + 3 = 0$. Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

Giải

Gọi M là điểm đối xứng của A qua phân giác góc B, suy ra ΔABM cân tại B, nên M nằm trên đường thẳng BC. Tương tự, gọi N là điểm đối xứng của A qua phân giác trong góc C thì N cũng nằm trên đường thẳng BC.



Giả sử $M(x_1; y_1)$, gọi I là trung điểm AM, ta có

$$I\left(\frac{2+x_1}{2}; \frac{-1+y_1}{2}\right).$$

Vì I thuộc đường phân giác góc B nên

$$\frac{2+x_1}{2} - 2\frac{-1+y_1}{2} + 1 = 0. \quad (1)$$

Mặt khác, $\overrightarrow{AM}\,(x_1 - 2; y_1 + 1)$ cùng phương với vectơ pháp tuyến (1; –2) của đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ nên

$$\frac{x_1 - 2}{1} = \frac{y_1 + 1}{-2} \Leftrightarrow -2x_1 + 4 = y_1 + 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra tọa độ M là M(0; 3). Tương tự, ta tính được tọa độ N là N(– 2; – 5). Đường thẳng chứa cạnh BC qua MN nên có phương trình

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-3}{-5-3} \Leftrightarrow 4x - y + 3 = 0.$$

Bài 19. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho ΔABC biết A(– 1; 3), đường cao BH nằm trên đường thẳng $y = x$; phân giác góc C nằm trên đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.

Giải

Đường thẳng AC vuông góc với BH: x – y = 0 nên AC có vectơ chỉ phương (1; –1), mặt khác, nó đi qua A(– 1; 3) nên có phương trình là

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-1}\Leftrightarrow x+y-2=0.$$

Toạ độ C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x+3y+2=0\\x+y-2=0\end{cases}$$

nên C(4; –2). Toạ độ giao điểm E của đường cao BH và đường phân giác CD là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x+3y+2=0\\x-y=0\end{cases}$$

từ đó, $E\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Khoảng cách EH là $\frac{|-1/2-1/2-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Vì E cách đều cạnh AC và BC nên khoảng cách EK = EH. Đường thẳng BC đi qua đỉnh C không thể có phương trình x = 4, vì nếu thế thì CD không còn là đường phân giác của góc C nữa. Do đó nếu gọi *k* là hệ số góc của đường thẳng BC thì phương trình BC là y = *k*(x – 4) – 2 hay *k*x – y – 4*k* – 2 = 0. Khoảng cách EH là:

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}-4k-2\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=\frac{1}{7}\end{array}\right..$$

Với *k* = –1, ta có y = –x + 2 hay x + y – 2 = 0, đây chính là phương trình cạnh AC. Với *k* = 1/7, ta có x – 7y – 18 = 0, đây chính là phương trình cạnh BC.

Bài 20. (Cuộc thi North Dakota Mathematics Talent Search, 2000)

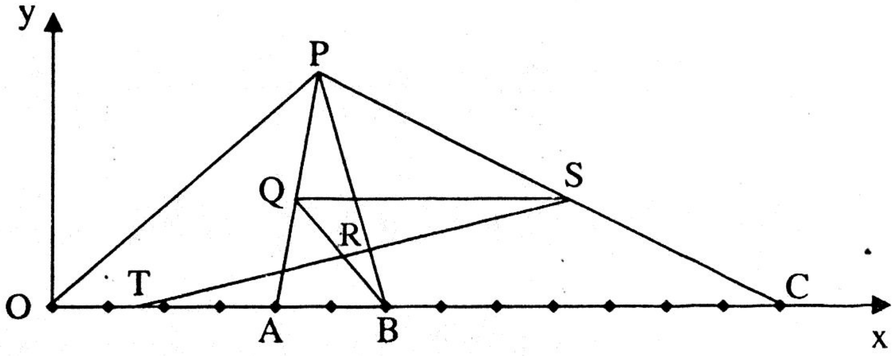
Các điểm O, A, B, C nằm trên trục số có toạ độ tương ứng là 0, 8, 12, 26. Gọi P là điểm không nằm trên trục số này. Cho Q là trung điểm PA; R là trung điểm QB; S là trung điểm PC.

Tìm toạ độ giao điểm của SR với trục số đó.

Giải

Ta dựng hệ trục vuông góc có trục số đã cho là trục hoành (OC), trục tung vuông góc OC tại O. Khi đó O = (0,0), A = (8, 0), B = (12, 0), C = (26, 0). Giả sử P = (m, n) với n ≠ 0.

Do Q là trung điểm AP nên: Q = (m/2 + 4, n/2).



Tương tự, từ giả thiết ta cũng có:

R = (m/4 + 8, n/4) và S = (m/2 + 13, n/2).

Phương trình đường thẳng RS có dạng y = ax + b. Gọi T là giao điểm của đường thẳng RS và trục Ox, hiển nhiên T có tung độ bằng 0, do đó T có hoành độ là $y = -\frac{b}{a}$. Mặt khác, đường thẳng này đi qua R và S nên khi thay toạ độ của chúng vào ta được:

n = (m + 32)a + 4b và n = (m + 26)a + 2b.

Trừ hai phương trình trên vế theo vế ta có 6a + 2b = 0 và suy ra toạ độ điểm T trên trục số đã cho là $-\frac{b}{a} = 3$.

Bài 21. Cho đường thẳng 3x – 4y + 2 = 0.

a) Viết phương trình của đường thẳng dưới dạng tham số, dạng chính tắc.

b) Viết phương trình của đường thẳng dưới dạng phương trình theo đoạn chắn.

Giải

a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u}(4; 3)$. Tìm một điểm của đường thẳng, chẳng hạn (– 2; –1), khi đó phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đó là

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases} ; \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{3}.$$

b) Từ phương trình chính tắc, suy ra tọa độ giao điểm của đường thẳng đó với hai trục là A(0; 2) và B($-\frac{2}{3}$; 0). Vậy phương trình theo đoạn chắn của đường thẳng đó là $\frac{x}{-\frac{2}{3}} + \frac{y}{2} = 1$.

Bài 22. Cho ba điểm A(3; 5), B(–1; 1), C(4; 2).

a) Chứng minh A, B, C là ba điểm không thẳng hàng.

b) Viết phương trình đường cao BB' của tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ điểm A', chân đường cao kẻ từ A.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{BA} = (4; 4), \overrightarrow{BC} = (5; 1)$. Do $\frac{4}{5} \neq \frac{4}{1}$ nên $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ không cùng phương, suy ra A, B, C không thẳng hàng.

b) Đường cao BB' đi qua B, nhận $\overrightarrow{AC}$ làm vectơ pháp tuyến. Ta có $\overrightarrow{AC} = (1; -3) \Rightarrow$ (BB'): 1(x + 1) – 3 (y + 1) = 0 hay

$$x - 3y - 2 = 0.$$

c) $\overrightarrow{BC} = (5; 1)$. Phương trình tham số của BC là:

$$\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 1 + t \end{cases}.$$

Suy ra A'(–1 + 5t; 1 + t). $\overrightarrow{AA'} = (5t - 4; t - 4)$. Ta có

$$AA' \perp BC \Leftrightarrow 5(5t - 4) + t - 4 = 0 \Leftrightarrow 26t = 24 \Leftrightarrow t = \frac{12}{13}.$$

Thay t vào phương trình tham số của BC được: $A'\left(-\frac{60}{13}; \frac{1}{13}\right)$.

Có thể tiến hành cách khác như sau: Viết phương trình đường cao AA' (đó là đường qua A và vuông góc BC). Sau đó, giải hệ phương trình để tìm giao điểm của hai đường thẳng AA' và BC.

Bài 23. Cho ba điểm A(2 ; 5), B(–1 ; 2) và C(5 ; 4). Tìm phương trình đường thẳng d đi qua A sao cho hai khoảng cách từ B và C đến d bằng nhau.

Giải.

Gọi I là trung điểm của BC thì I = (2 ; 3). Xét đường thẳng qua A(2 ; 5) và trung điểm I(2 ; 3) của BC, đường thẳng này có phương trình x = 2. Ta dễ thấy hai khoảng cách từ B và C đến đường thẳng này bằng nhau.

Vậy đường thẳng x = 2 thoả mãn đề bài.

Mặt khác, xét đường thẳng đi qua A(2 ; 5) và song song với BC. Rõ ràng hai khoảng cách từ B và C đến đường thẳng này cũng bằng nhau. Ta có $\overrightarrow{BC} = 2(3\ ;\ 1)$. Phương trình của đường thẳng này là: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$ hay $x - 3y + 13 = 0$.

Tóm lại, ta có hai đường thẳng x = 2 và x − 3y + 13 = 0 thoả mãn đề bài.

Bài 24. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy biết tọa độ các đỉnh ΔABC là A(− 6; − 3); B(− 4; 3); C(9; 2).

a) Viết phương trình đường phân giác AD của ΔABC.

b) Tìm điểm P trên (d) sao cho ABPC là hình thang.

Giải.

a) Ta có $AB = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$, $AC = \sqrt{225+25} = \sqrt{250}$.

Theo định lí đường phân giác:

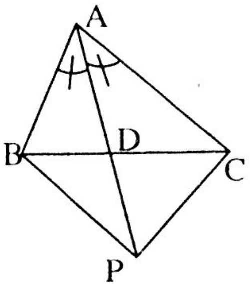
$$DB/DC = AB/AC = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{250}} = \frac{2}{5}.$$

Suy ra $\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{DC}$, từ đó, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = -\frac{2}{5}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})$ (với O là gốc toạ độ của hệ trục Oxy), hay

$$\overrightarrow{OD} = \frac{5}{7}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{5}{7}(-4) + \frac{2}{7}(9) = -\frac{2}{7} \\ y_D = \frac{5}{7}(3) + \frac{2}{7}(2) = \frac{19}{7} \end{cases}.$$

Từ đó, dễ dàng tính được phương trình đường phân giác AD (đi qua A và D) là x − y + 3 = 0.

b) Giả sử P là điểm trên (d) sao cho ABPC là hình thang.



- *Trường hợp 1:* AC, BP là đáy ⇔ AC // BP.

+ Đường thẳng BP có B(– 4; 3) và có vectơ chỉ phương là (3; 1) (do $\overrightarrow{AC} = (15; 5)$) nên BP có phương trình tham số:

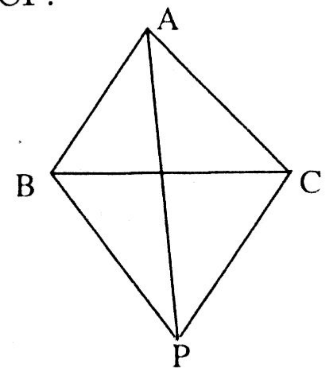
$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 3 + t \end{cases}.$$

+ Theo câu trên, AD có phương trình x – y + 3 = 0. Để tìm giao điểm của hai đường thẳng AD và BP, thay x, y từ phương trình tham số của BP vào phương trình x – y + 3 = 0, ta được:

$$(-4 + 3t) - (3 + t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Từ đó, ta có giao điểm P(2; 5).

- *Trường hợp 2*: AB và CP là đáy: AB // CP.



+ Lập phương trình tổng quát của đường thẳng CP biết C(9; 2) và vectơ chỉ phương là (1; 3), do $\overrightarrow{AB} = (2; 6)$:

$$3x - 2y - 25 = 0.$$

+ Toạ độ giao điểm P là nghiệm của hệ gồm hai phương trình

$$x - y + 3 = 0 \text{ và } 3x - 2y - 25 = 0.$$

Từ đó, P(14; 17). Vậy, nếu chọn P(2; 5) thì ABCP là hình thang có đáy là AC, BP. Nếu chọn P(14; 17) thì ABCP là hình thang có đáy là AB, CP.

P10. Tìm phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ trong mỗi trường hợp sau đây:

a) M(1 ; –4) và $\vec{u}\,(2 ; 3)$; b) M ≡ O(0 ; 0) và $\vec{u}\,(1 ; -2)$.

P11. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có phương trình là:

a) $\Delta_1 : 2x + 3y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : 4x + 5y - 6 = 0$;

b) $\Delta_1 : 3x - 2y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : 2x + 3y - 5 = 0$;

c) $\Delta_1: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$;

d) $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 5t \end{cases}$ và $\Delta_2: 5x + 4y - 7 = 0$.

P12. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(–2 ; –4), cắt trục Ox tại A và Oy tại B sao cho tam giác OAB vuông cân.

P13. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau và tìm giao điểm của chúng (nếu có):

a) $2x - 5y + 3 = 0$ và $5x + 2y - 3 = 0$.

b) $x - 3y + 4 = 0$ và $0,5x - 1,5y + 4 = 0$.

c) $10x + 2y - 3 = 0$ và $5x + y - 1,5 = 0$.

P14. Hãy xác định tọa độ điểm P trên đường thẳng Δ có phương trình $x - y + 2 = 0$ sao cho P cách đều A(0; 4) và B(4; –9).

P15. Xét xem ba đường thẳng sau có đồng quy hay không:

(1) $x - y + \sqrt{29} = 0$; (2) $\sqrt{3}x - y = -\sqrt{29}$;

(3) $x - y + \sqrt{32} - 17 = 0$.

P16. Cho tam giác ABC có phương trình các cạnh:

AB : $2x - 3y - 1 = 0$,

BC : $x + 3y + 7 = 0$,

CA : $5x - 2y + 1 = 0$.

Viết phương trình đường cao của tam giác kẻ từ đỉnh B.

P17. Cho đường thẳng d: $x - y = 0$ và điểm M(2; 1).

a) Tìm phương trình đường thẳng đối xứng với d qua M.

b) Tìm hình chiếu của M xuống đường thẳng d.

P18. Trong mặt phẳng hệ trục vuông góc Oxy, cho điểm A(1; 2), B(–1; 2) và đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 1 = 0$.

Tìm toạ độ điểm C trên d sao cho ΔABC có CA = CB.

P19. Cho đường thẳng d có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 + 3t \end{cases}.$$

a) Tìm giao điểm của d với trục hoành và với trục tung.

b) Các điểm A(1 ; 1), B(5 ; 1), C(3 ; 1), D(3 ; –2), có nằm trên đường thẳng d hay không?

P20. Cho ba điểm A(2 ; 5), B(–1 ; 2) và C(5 ; 4). Tìm phương trình đường thẳng d đi qua A sao cho hai khoảng cách từ B và C đến d bằng nhau.

P21. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M(3; –2) xuống đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$ b) d : $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-4}$ c) d : $5x - 12y + 10 = 0$.

P22. Lập phương trình các cạnh của ΔABC, nếu B(–4; 5) và hai đường cao hạ từ hai đỉnh còn lại lần lượt có phương trình

$$5x + 3y - 4 = 0 \text{ và } 3x + 8y + 13 = 0.$$

§ 3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

3.1. Tóm tắt kiến thức cần nhớ

- *Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng*

  Trong mặt phẳng toạ độ cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát Ax + By + C = 0. Khi đó, khoảng cách d(M ;2 Δ) từ điểm M(x_M; y_M) đến Δ là

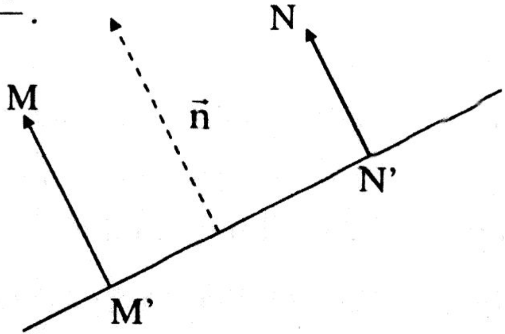
$$d(M; \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

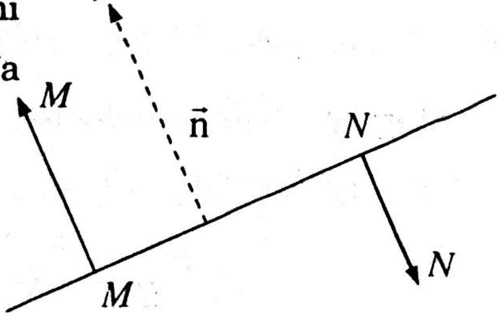
  Nếu gọi M' là hình chiếu (vuông góc) của M trên Δ, ta có: $\overrightarrow{M'M} = t.\vec{n}$.

  Trong quá trình chứng minh công thức khoảng cách trên (SGK), ta tính được $t = \dfrac{Ax_M + By_M + C}{A^2 + B^2}$.

  Tương tự nếu có điểm N(x_N ; y_N) với N' là hình chiếu của N trên Δ thì ta cũng có: $\overrightarrow{N'N} = t'.\vec{n}$, trong đó

$$t' = \frac{Ax_N + By_N + C}{A^2 + B^2}.$$





Nhận xét.

* t, t' cùng dấu khi và chỉ khi $\overrightarrow{M'M}$ và $\overrightarrow{N'N}$ cùng hướng, nghĩa là M, N ở về một phía của Δ.

* t, t' khác dấu khi và chỉ khi $\overrightarrow{M'M}$ và $\overrightarrow{N'N}$ ngược hướng, nghĩa là M, N ở về hai phía của Δ.

Như vậy:

a) Hai điểm M, N nằm cùng phía đối với Δ khi và chỉ khi:

$$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) > 0.$$

b) Hai điểm M, N nằm khác phía đối với Δ khi và chỉ khi:

$$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) < 0.$$

Ví dụ: Hai điểm (7; 6) và (–1; 2) nằm về hai phía của đường thẳng y = x – 2. Thật vậy, y = x – 2 ⇔ x – y + 2 = 0 và ta có

$$(7 - 6 + 2)(-1 - 2 + 2) < 0.$$

- *Phương trình các đường phân giác*

Cho hai đường thẳng cắt nhau:

$$\Delta_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ và } \Delta_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Hai đường phân giác của hai góc tạo bởi hai đường thẳng đó có phương trình là

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\text{hoặc } \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

- *Cách chọn đường phân giác trong (hoặc ngoài)*

Khi lập phương trình đường phân giác (chẳng hạn, AD của tam giác ABC), ta được hai phương trình, một phương trình biểu diễn phân giác trong và một phương trình biểu diễn phân giác ngoài. Để xét xem đâu là phân giác trong hoặc ngoài, ta thực hiện như sau: Chọn ra công thức ứng với dấu cộng (+) và kí hiệu biểu thức là $f(x; y) = 0$. Tính toạ độ của hai đỉnh còn lại, $B(x_1 ; y_1)$ và $C(x_2 ; y_2)$. Tiếp theo, thay toạ độ vào biểu thức phân giác, ta được $f(x_1 ; y_1)$ và $f(x_2 ; y_2)$. Khi đó:

Nếu $f(x_1 ; y_1).f(x_2 ; y_2) < 0$ thì $f(x ; y) = 0$ là phân giác trong.

Nếu $f(x_1 ; y_1).f(x_2 ; y_2) > 0$ thì $f(x ; y) = 0$ là phân giác ngoài.

- *Góc giữa hai đường thẳng*

Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc, góc nhỏ nhất trong bốn góc đó được gọi là *góc giữa hai đường thẳng a và b*, kí hiệu là (a, b). Khi a song song hoặc trùng với b, ta quy ước rằng góc giữa chúng bằng 0^0. Ta luôn có $(a, b) \leq 90^0$.

Gọi $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của a, b, ta có

$$(a, b) = (\vec{u}; \vec{v}) \text{ nếu } (\vec{u}; \vec{v}) \leq 90^0 ;$$

$$(a, b) = 180^0 - (\vec{u}; \vec{v}) \text{ nếu } (\vec{u}; \vec{v}) > 90^0.$$

Chú ý. Giả sử hai đường thẳng cho bởi phương trình $y = k_1x + b_1$ và $y = k_2x + b_2$. Gọi φ là góc giữa chúng, ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|k_1k_2 + 1|}{\sqrt{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}}.$$

Suy ra các sự kiện quen thuộc trong đại số sau đây: Điều kiện vuông góc của hai đường thẳng là $k_1k_2 = -1$. Điều kiện song song của hai đường thẳng là $k_1 = k_2$, với $b_1 \neq b_2$.

* Ngoài ra ta còn có công thức sau khi $k_1k_2 \neq -1$:

$$\text{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Chứng minh. Từ công thức $\text{tg}^2\varphi = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi} - 1$ suy ra

$$\text{tg}^2\varphi = = \frac{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}{(k_1k_2 + 1)^2} - \frac{(k_1k_2 + 1)^2}{(k_1k_2 + 1)^2} = \frac{(k_2 - k_1)^2}{(k_1k_2 + 1)^2}$$

suy ra điều phải chứng minh.

3.2. Một số dạng toán

Bài 25. Tìm quỹ tích các điểm cách đều hai đường thẳng:

a) $5x + 3y - 3 = 0$ và $5x + 3y + 7 = 0$;

b) $4x - 3y + 2 = 0$ và $y - 3 = 0$.

Giải

a) Điểm M(x ; y) cách đều hai đường thẳng $5x + 3y - 3 = 0$ và $5x + 3y + 7 = 0$ khi và chỉ khi

$$\frac{|5x+3y-3|}{\sqrt{34}} = \frac{|5x+3y+7|}{\sqrt{34}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 5x+3y-3 = 5x+3y+7 & (1) \\ 5x+3y-3 = -5x-3y-7 & (2) \end{array}\right.$$

Tập nghiệm của (1) là tập rỗng, ngoài ra:

$$(2) \Leftrightarrow 10x + 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow 5x + 3y + 2 = 0.$$

Vậy quỹ tích các điểm M là đường thẳng $5x + 3y + 2 = 0$, đường thẳng này song song và cách đều hai đường thẳng đã cho.

b) Bằng cách tương tự, toạ độ các điểm cách đều hai đường thẳng là nghiệm của phương trình:

$$\frac{|4x-3y+2|}{5} = \frac{|y-3|}{1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-3y+2 = 5y-15 \\ 4x-3y+2 = -5y+15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4x-8y+17 = 0 & (1) \\ 4x+2y-13 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Quỹ tích các điểm đó là hai đường thẳng có phương trình (1) và (2).

Bài 26. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy biết tọa độ các đỉnh ΔABC là A(– 6; – 3); B(– 4; 3); C(9; 2). Viết phương trình đường phân giác AD của ΔABC.

Chú ý. Ta đã giải bài này trong câu (a), Bài 24, mục 2. Sau đây là cách giải bằng công thức đường phân giác.

Giải

Xác định phương trình cạnh AB: $3x - y + 15 = 0$ và phương trình cạnh AC: $x - 3y - 3 = 0$, sau đó lập phương trình đường phân giác theo công thức

$$\frac{|3x-y+15|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|x-3y-3|}{\sqrt{1+9}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-y+15 = x-3y-3 \\ 3x-y+15 = -x+3y+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+3 = 0 \\ x-y+3 = 0 \end{array}\right..$$

Để chọn phân giác trong của góc A, đặt $f(x,y) = x - y + 3$.

Thay tọa độ B và C vào f(x,y) ta được:

$f(x_B; y_B) = -4 - 3 + 3 = -4$, $f(x_C; y_C) = 9 - 2 + 3 = 10$

$\Rightarrow f(x_B; y_B).f(x_C; y_C) = -40$.

Vậy $x - y + 3 = 0$ là đường phân giác trong (AD) của ΔABC.

Bài 27. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho ΔABC biết A(1 ; 2) ; B(3 ; 4). Gọi (d) là đường thẳng đi qua A và song song với Oy. Tính góc giữa (d) và AB.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$. Vectơ chỉ phương của (d) là $\vec{j} = (0; 1)$,

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{j}) = \frac{2.0 + 2.1}{\sqrt{2^2 + 2^2}.\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

do đó, $(\overrightarrow{AB}, \vec{j}) = 45^0$, suy ra góc giữa (d) và AB là 45^0.

Bài 28. a) Cho hai đường thẳng Δ: $px + y + 3 = 0$, Δ’: $x + py - 5 = 0$.

Tính cos(Δ, Δ’).

b) Cho ba điểm A(4; –1), B(–3; 2), C(1; 6). Tính góc BAC và góc giữa hai đường thẳng AB, AC.

Giải

a) $\cos(\Delta, \Delta') = \dfrac{2|p|}{p^2 + 1}$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-7; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 7)$,

$$\cos\widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{21}{29} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 43^0 36'.$$

Các đường thẳng AB, AC lần lượt có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, mà $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) < 90^0$ nên $(AB, AC) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 43^0 36'$.

Bài 29. a) Tìm điểm M’ đối xứng với điểm M(2 ; 5) qua đường thẳng Δ: $x + 2y - 2 = 0$.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ’ đối xứng với Δ qua M.

Giải

a) Giả sử điểm M’(x ; y) đối xứng với điểm M(2 ; 5) qua đường thẳng Δ: $x + 2y - 2 = 0$, điều này xảy ra khi và chỉ khi $MM' \perp \Delta$, đồng thời M và M' cách đều Δ. Ta có $\overrightarrow{MM'} = (x-2 ; y-5)$, đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (-2 ; 1)$.

- $MM' \perp \Delta \Leftrightarrow \cos(MM', \Delta) = 0 \Leftrightarrow -2(x-2) + (y-5) = 0$

$$\Leftrightarrow -2x + y - 1 = 0. \qquad (1)$$

- M, M' cách đều $\Delta \Leftrightarrow \dfrac{|x + 2y - 2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|2 + 10 - 2|}{\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow |x + 2y - 2| = 10. \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra $y = 2x + 1$, thay vào (2) ta được

$$|5x| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Với $x = 2$, $y = 5$ ta có toạ độ của chính điểm M nên loại, với $x = -2$, ta được $y = -3$. Vậy điểm cần tìm là $M'(-2 ; -3)$.

b) Đường thẳng Δ' phải song song với Δ nên Δ' có phương trình $x + 2y + C = 0$, với $C \neq -2$. Khoảng cách từ M tới Δ và Δ' phải bằng nhau, nghĩa là:

$$\frac{|2.1 + 2.5 - 2|}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{|2.1 + 2.5 + C|}{\sqrt{1 + 2^2}},$$

do đó, $|12 + C| = 10 \Rightarrow 12 + C = \pm 10 \Rightarrow C = -2$ (loại) hoặc $C = -22$.

Vậy Δ' có phương trình $x + 2y - 22 = 0$.

Bài 30. Cho một hình bình hành có tâm là điểm I(3 ; 5) và hai cạnh của nó nằm trên hai đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ và $2x - 5y - 1 = 0$. Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại của hình bình hành.

Giải

Dễ thấy hai đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ và $2x - 5y - 1 = 0$ cắt nhau, do đó, hai cạnh còn lại của hình bình hành là hai đường thẳng lần lượt đối xứng với hai đường thẳng trên qua điểm I(3 ; 5).

Gọi đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ là Δ, đường thẳng đối xứng với Δ qua I(3 ; 5) là Δ'. Vì Δ' phải song song với Δ nên phương trình của Δ' có dạng: $x + 3y + C = 0$ với $C \neq -6$.

Khoảng cách từ I tới Δ và Δ' phải bằng nhau, tức là:

$$\frac{|3+15-6|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|3+15+C|}{\sqrt{1^2+3^2}},$$

suy ra $12 = |18 + C| \Rightarrow 18 + C = \pm 12 \Rightarrow C = -6$ (loại) hay $C = -30$.

Vậy phương trình của Δ' là: $x + 3y - 30 = 0$.

Bằng cách tương tự, đường thẳng đối xứng với đường thẳng $2x - 5y - 1 = 0$ qua điểm I(3 ; 5) có phương trình $2x - 5y + 39 = 0$.

P23. Tìm tập hợp những điểm M(x; y) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $Ax + By + C = 0$ bằng h không đổi.

P24. Mệnh đề sau đây đúng hay sai: Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh AB, AC của tam giác ABC, ta có

$$\cos\varphi = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}\ ?$$

P25. Cho ΔABC trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, biết A(3 ; –7), B(9 ; –5), C(–5 ; 9). Viết phương trình đường phân giác trong của góc lớn nhất của ΔABC.

P26. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho hình bình hành ABCD có số đo diện tích bằng 4. Biết đỉnh A(1 ; 0) ; B(2 ; 0) và giao điểm I của hai đường chéo AC và BD nằm trên đường thẳng $y = x$. Hãy tìm toạ độ các đỉnh C và D.

P27. Cho ba điểm A(3; 0), B(–5; 4) và P(10; 2). Viết phương trình đường thẳng đi qua P và cách đều A, B.

P28. Cho hai đường thẳng Δ_1: $x + 2y - 3 = 0$ và Δ_2: $3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm P(3; 1) và cắt (Δ_1), (Δ_2) lần lượt ở A, B sao cho: đường thẳng Δ tạo với Δ_1 và Δ_2 một tam giác cân có cạnh đáy là AB.

P29. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(0; 1) và tạo với đường thẳng $x + 2y + 3 = 0$ một góc bằng 45^0.

§ 4. ĐƯỜNG TRÒN

4.1. Tóm tắt kiến thức cần nhớ

- *Phương trình đường tròn*

  Trên mặt phẳng toạ đô, cho đường tròn (C) tâm I(a; b) có bán kính R. Điểm M(x; y) thuộc đường tròn khi và chỉ khi IM = R, hay là: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (*). Ta gọi phương trình (*) là phương trình của đường tròn (C).

- *Nhận dạng phương trình đường tròn*

  Phương trình (*) tương đương với

  $$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$$

  Như vậy, mỗi đường tròn trong mặt phẳng toạ độ đều có phương trình dạng:

  $$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0. \qquad (**)$$

  Ngược lại, phương trình:

  $$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$$

  Với điều kiện $A^2+B^2>C$, là phương trình của đường tròn có tâm I(–A; –B) và có bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2-C}$.

  Chú ý. (**) chỉ là phương trình đường tròn khi $A^2+B^2>C$. Khi $A^2+B^2<C$ hay $A^2+B^2-C<0$, tập hợp các điểm M thoả mãn (**) là tập rỗng. Khi $A^2+B^2=C$ hay $A^2+B^2-C=0$, tập hợp các điểm M chỉ có một điểm có toạ độ (–A; –B).

- *Tiếp tuyến của đường tròn*

  Cho đường tròn (C) có tâm I(a; b), bán kính R và điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên (C). Phương trình đường thẳng tiếp xúc với (C) tại M là $(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)=0$.

  Chú ý.

  1) Điều kiện để đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (I; R) là $d(I;\Delta)=R$.

2) Đối với bài toán tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác, cần chú ý vận dụng tính chất quen thuộc: Tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm ba đường phân giác, tâm này cách đều ba cạnh. Tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm ba đường trung trực, tâm này cách đều ba đỉnh. Đối với bài toán về đường tròn ngoại tiếp, nếu biết ba đỉnh, có thể thay toạ độ ba đỉnh vào phương trình tổng quát của đường tròn rồi xác định các thông số cần thiết.

4.2. Một số dạng toán

Bài 31. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm

$$M(1; 2),\ N(5; 2) \text{ và } P(1; -3).$$

Giải

Cách 1. Có thể tìm được phương trình đường tròn nếu biết toạ độ của tâm và bán kính của nó. Gọi I(x; y) là tâm của đường tròn, từ điều kiện IM = IN = IP, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=(x-5)^2+(y-2)^2\\(x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=(x-5)^2\\(y-2)^2=(y+3)^2\end{cases}.$$

Dễ dàng tìm được nghiệm của hệ là $x = 3$; $y = -0{,}5$. Vậy I(3; 0,5). Bán kính của đường tròn: $R^2 = IM^2 = 10{,}25$. Phương trình đường tròn là: $(x-3)^2 + (y+0{,}5)^2 = 10{,}25$.

Cách 2. Giả sử phương trình đường tròn có dạng:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0.$$

Do M, N, P thuộc đường tròn nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}5+2A+4B+C=0 & (1)\\29+10A+4B+C=0 & (2)\\10+2A-6B+C=0 & (3)\end{cases}$$

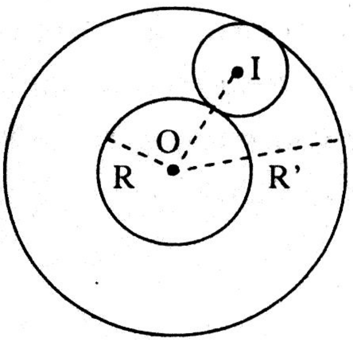
Từ (1) và (2) suy ra $24 + 8A = 0$, hay $A = -3$. Từ (1) và (3) suy ra

$$-5 + 10B = 0,\ B = 0{,}5.$$

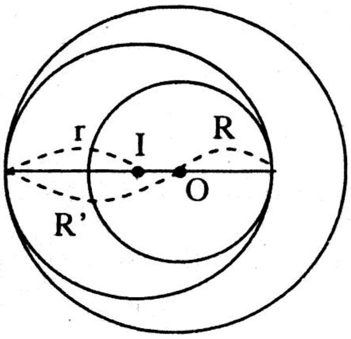
Thay A, B vừa tìm vào (1), ta có $C = -5 + 6 - 2 = -1$. Vậy phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0$.

Bài 32. Cho hai đường tròn đồng tâm (O ; R) và (O' ; R'), với $R < R'$. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn tiếp xúc với (O) và (O').

Giải



+ Nếu (I ; r) tiếp xúc trong với (O; R') và tiếp xúc ngoài với (O ; R), ta có $IO = R' - r$. Mặt khác $IO = R + r$. Do vậy $IO = \frac{R'+R}{2}$. Vậy quỹ tích tâm I là đường tròn tâm O, bán kính $\frac{R'+R}{2}$.



+ Nếu (I ; r) tiếp xúc trong với cả hai đường tròn (O ; R) và (O ; R'), ta có $IO = R' - r$. Mặt khác $IO = r - R$. Do vậy, $IO = \frac{R'-R}{2}$. Vậy quỹ tích tâm I là đường tròn tâm O, bán kính $\frac{R'-R}{2}$.

Bài 33. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C):

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(\sqrt{5} - 1; 1)$.

Nhận xét. Theo sách giáo khoa, phương trình đường thẳng tiếp xúc với (C) tại M là $(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$, nhưng điều cần nhớ là điểm $M(x_0; y_0)$ phải nằm trên (C). Do đó, trước tiên phải *kiểm tra* xem M có thuộc (C) hay không (học sinh dễ nhầm lẫn điều này: áp dụng ngay công thức đã học mà không kiểm tra điểm M nằm ở đâu).

Trong trường hợp M không thuộc (C), như bài này, phương pháp quen thuộc là sử dụng tính chất: Để Δ là tiếp tuyến của đường tròn, điều kiện cần và đủ là khoảng cách từ tâm đến Δ phải bằng bán kính của đường tròn.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(–1; 2) và bán kính $R = \sqrt{5}$. Dễ thấy điểm M không thuộc đường tròn (C).

Đường thẳng Δ đi qua M có phương trình:

$$A(x-\sqrt{5}+1)+B(y-1)=0 \text{ (với } A^2+B^2\neq 0), \qquad (1)$$

ở đây, (A, B) là vectơ pháp tuyến của Δ.

Khoảng cách từ tâm I(–1 ; 2) đến đường thẳng Δ là:

$$d=\frac{\left|A(-1-\sqrt{5}+1)+B(2-1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Để Δ là tiếp tuyến của đường tròn , điều kiện cần và đủ là khoảng cách đó phải bằng bán kính của đường tròn, tức là:

$$\frac{\left|A(-1-\sqrt{5}+1)+B(2-1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|-\sqrt{5}A+B\right|=\sqrt{5A^2+5B^2}.$$

Biến đổi biểu thức trên, ta được $B(2B+\sqrt{5}A)=0$, suy ra

$$B=0 \text{ hoặc } 2B+\sqrt{5}A=0.$$

Trường hợp 1: Nếu B = 0, vì $A^2+B^2\neq 0$ nên $A\neq 0$, chia hai vế của (1) cho A ta được $x-\sqrt{5}+1=0$.

Trường hợp 2: Nếu $2B+\sqrt{5}A=0$, ta có thể chọn A = 2, suy ra $B=-\sqrt{5}$.

Tóm lại, ta có hai tiếp tuyến cần tìm là

$$x-\sqrt{5}+1=0 \text{ và } 2x-\sqrt{5}y+2-\sqrt{5}=0.$$

Chú ý. Khi có một biểu thức liên hệ giữa A và B trong phương trình đường thẳng (như trên), ta có thể chọn cho A một giá trị tùy ý rồi suy ra B (cũng vậy, có thể chọn cho B một giá trị tùy ý rồi suy ra A). Hiển nhiên, nên chọn thế nào để thuận lợi trong tính toán và để phương trình tìm được của đường thẳng có dạng sao cho các hệ số *gọn* nhất. Sở dĩ có điều này, vì vectơ pháp tuyến (A, B) chỉ là *một trong vô số* các vectơ pháp tuyến, mà từ mỗi một trong các vectơ pháp tuyến này, ta có thể tạo vectơ pháp tuyến khác bằng cách nhân cho một hệ số.

Bài 34. Trong mặt phẳng O*xy* cho họ đường cong (C_m) có phương trình: $x^2+y^2+2(m-1)x-2(m-2)y+m^2-8m+13=0$.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) là đường tròn.

Tìm quỹ tích tâm I của họ (C_m) khi m thay đổi.

b) Cho m = 4. Viết các phương trình các tiếp tuyến kẻ từ điểm A(1, 5) đến đường tròn (C_4).

Giải

a) Phương trình của họ (C_m) được viết lại thành:

$$[x+(m-1)]^2+[y-(m-2)]^2=m^2+2m-8.$$

Để (C_m) là đường tròn, ắt có và đủ là

$$m^2+2m-8>0 \Leftrightarrow (m<-4 \vee m>2). \qquad (*)$$

Đường tròn này có tâm là I với tọa độ $(x=-m+1,\ y=m-2)$. Khử m ở hoành độ và tung độ, kết hợp với (*), ta suy ra quỹ tích tâm I khi m thay đổi là phần đường thẳng $x+y-3=0$, với $x<-1$ hay $x>5$.

b) Khi m = 4, phương trình đường tròn (C_4) là:

$$(x+3)^2+(y-2)^2=16 \Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y-3=0. \qquad (**)$$

Đường tròn này có tâm $I(-3,2)$ và bán kính là 4. Ta gọi (D) là đường thẳng đi qua A. Xét sự tương giao giữa (D) và (C_4), có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: (D) là đường thẳng x = 1.

Dễ thấy khoảng cách từ (D) đến tâm I của (C_4) là 4. Vậy đường thẳng x = 1 là một tiếp tuyến kẻ từ A của đường tròn.

Trường hợp 2: (D) có phương trình $y=k(x-1)+5$.

(D) là tiếp tuyến với (C_4) khi và chỉ khi khoảng cách từ I đến (D) bằng 4:

$$\frac{-3k+5-k-2}{\sqrt{k^2+1^2}}=\frac{-4k+3}{\sqrt{k^2+1^2}}=4 \Leftrightarrow k=-\frac{7}{24}.$$

Do đó (D) có phương trình: $7x+24y-127=0$.

Tóm lại, qua A có thể kẻ đến (C_4) hai tiếp tuyến là $x=1$ và $7x+24y-127=0$.

Bài 35. Trong mặt phẳng O*xy* cho đường tròn (C) có phương trình:

$$x^2+y^2-6x+2y+6=0$$

và điểm A(1, 3).

a) Xác định tâm I và bán kính R của (C) và chứng tỏ A nằm ngoài (C).

b) Lập phương trình tiếp tuyến của (C) xuất phát từ A.

Giải

a) Ta viết lại phương trình của (C) dưới dạng chính tắc:

$$(x-3)^2+(y+1)^2=4.$$

Vậy (C) có tâm $I(3,-1)$ và bán kính $R=2$.

b) Vì khoảng cách IA là $\sqrt{(3-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{20}>2$ nên suy ra A nằm ngoài (C). Họ đường thẳng đi qua A(1, 3) gồm có đường thẳng $x=1$ và các đường $y=kx-k+3$.

- Thay $x=1$ vào phương trình của (C) ta được:

$$(y+1)^2=0,$$

phương trình này cho ta nghiệm kép $y=1$.

Vậy đường thẳng $x=1$ tiếp xúc với (C).

- Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng $y=kx-k+3$ là

$$h=\frac{2|k+2|}{\sqrt{k^2+1}},$$

để đường thẳng tiếp xúc với (C) ta phải có:

$$h=\frac{2|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2\Leftrightarrow\sqrt{k^2+1}=|k+2|\Leftrightarrow k=-\frac{3}{4},$$

thay vào phương trình $y=kx-k+3$ ta được: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$.

Vậy qua A có hai tiếp tuyến với (C):

$$x=1 \text{ và } y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}.$$

Bài 36. Cho các đường tròn:

(C): $x^2+y^2=1$, (C_m): $x^2+y^2-2(m+1)x+4my=5$.

a) Chứng minh rằng có hai đường tròn (C_{m1}), (C_{m2}) tiếp xúc với đường tròn (C), ứng với hai gía trị m_1, m_2 của m.

b) Xác định phương trình các đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_{m1}), (C_{m2}) nói trên.

Giải

a) Ta viết lại phương trình đường tròn (C_m):

$$[x-(m+1)]^2+(y+2m)^2=5m^2+2m+6,$$

ta suy ra tâm O_m của (C_m) có toạ độ $(m+1,-2m)$, bán kính của (C_m) là $R_m=\sqrt{5m^2+2m+6}$. Ngoài ra, $O(0,0)$ và $R=1$ là tâm và bán kính của (C). Để (C_m) tiếp xúc với (C), ắt có và đủ là:

$$\left[\begin{array}{l} R_m+R=O_mO \\ |R_m-R|=O_mO \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{5m^2+2m+6}+1=\sqrt{5m^2+2m+1} \\ \left|\sqrt{5m^2+2m+6}-1\right|=\sqrt{5m^2+2m+1}. \end{array}\right.$$

Vì $5m^2+2m+6=4m^2+(m+1)^2+1>1$ nên điều này tương đương với: $\sqrt{5m^2+2m+6}+1=\sqrt{5m^2+2m+1}$, và ta được: $m=-1$, $m=\frac{3}{5}$.

Tóm lại, ứng với mỗi một trong hai giá trị trên của m, có hai đường tròn (C_{-1}) và $(C_{3/5})$ tiếp xúc với (C).

b) Phương trình của hai đường tròn (C_{-1}) và $(C_{3/5})$ lần lượt là: $x^2+(y-1)^2=9$, $(x-\frac{8}{5})^2+(y+\frac{6}{5})^2=9$. Hai đường tròn này có cùng bán kính là 3, khoảng cách hai tâm M, N của chúng là

$$MN=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(1+\frac{6}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{37}{5}}<6$$

nên chúng cắt nhau, do vậy, chúng có hai tiếp tuyến chung ngoài song song nhau. Vectơ chỉ phương của hai tiếp tuyến này là:

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{8}{5},-\frac{16}{5}\right),$$

suy ra vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2,1)$ và phương trình hai tiếp tuyến này có dạng $2x+y=c\ (\Delta)$. Do khoảng cách giữa M hay N đến (Δ) phải bằng 3 nên từ đó:

$$\frac{|12+c|}{\sqrt{5}}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=3\sqrt{5}-2 \\ c=-3\sqrt{5}-2 \end{array}\right.,$$

và phương trình hai tiếp tuyến cần chỉ ra là:

$$2x+y+3\sqrt{5}-2=0,\quad 2x+y-3\sqrt{5}-2=0.$$

Bài 37. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy cho hai đường tròn (C_1), (C_2) có phương trình lần lượt là:

$$x^2+y^2-2x-2y-2=0\ ,\ x^2+y^2-8x-2y+16=0\,.$$

a) Chứng minh rằng (C_1), (C_2) tiếp xúc nhau.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C_1), (C_2).

Giải

a) Các phương trình của (C_1), (C_2) lần lượt được viết lại dưới dạng chính tắc như sau:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4\ ,\ (x-4)^2+(y-1)^2=1\ ,$$

và ta suy ra (C_1) có tâm $O_1(1,1)$, bán kính 2; (C_2) có tâm $O_2(4,1)$ bán kính 1. Khoảng cách O_1O_2 là $\sqrt{3^2+0}=3$, bằng tổng hai bán kính nên (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại $T(3, 1)$.

b) Dĩ nhiên, $x=3$ là một tiếp tuyến chung của hai đường tròn, ta sẽ tìm hai tiếp tuyến chung còn lại.

Xét đường thẳng (D) tuỳ ý có phương trình $ax-y+b=0$, ta gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ O_1, O_2 đến (D), ta có:

$$d_1=\frac{|a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}},\ d_2=\frac{|4a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}\,.$$

Để (D) trở thành tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) ta phải có $d_1=2$, $d_2=1$, hay là:

$$\begin{cases}\dfrac{|a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=2\\[2mm] \dfrac{|4a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|a-1+b|=2\sqrt{a^2+1}\\ |a-1+b|=2|4a-1+b|\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|a-1+b|=2\sqrt{a^2+1}\\ a+b-1=2(4a+b-1)\end{cases}\\ \begin{cases}|a-1+b|=2\sqrt{a^2+1}\\ a+b-1=-2(4a+b-1)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|a-1+b|=2\sqrt{a^2+1}\\ b=-7a+1\end{cases}\quad (*)\\ \begin{cases}|a-1+b|=2\sqrt{a^2+1}\\ 3b=-9a+3\end{cases}\quad (**)\end{array}\right.\,.$$

Giải hệ (*) ta được:

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{8} \\ b = -7a + 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ b = -\dfrac{7}{2\sqrt{2}} + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \\ b = \dfrac{7}{2\sqrt{2}} + 1 \end{cases} \right),$$

do đó ta có hai tiếp tuyến chung:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}x - y - \frac{7}{2\sqrt{2}} + 1 = 0 \text{ và } -\frac{1}{2\sqrt{2}}x - y + \frac{7}{2\sqrt{2}} + 1 = 0.$$

Hệ (**) vô nghiệm, vì nếu thay $b = -3a + 1$ từ phương trình thứ hai vào phương trình đầu thì ta được phương trình vô nghiệm $2|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}$.

Tóm lại, (C_1) và (C_2) có ba tiếp tuyến chung là $x = 3$,

$$x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2} - 7 = 0 \text{ và } -x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2} + 7 = 0.$$

Bài 38. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy cho đường cong $x^2 + y^2 + 2mx - 6y + 4 - m = 0$ (C_m).

a) Chứng minh rằng (C_m) là đường tròn với mọi m. Tìm tập hợp tâm của (C_m) khi m thay đổi.

b) Với m = 4, viết phương trình đường thẳng vuông góc với đường thẳng (Δ): $3x - 4y + 10 = 0$ và cắt đường tròn tại hai điểm A, B, sao cho AB = 6 đơn vị độ dài.

Giải

a) (C_m): $(x + m)^2 + (y - 3)^2 = m^2 + m + 5, \forall m$. Do đó, với mọi m, (C_m) là đường tròn có tâm I(–m ; 3) và bán kính $\sqrt{m^2 + m + 5}$.

Suy ra tập hợp các điểm I là đường thẳng y = 3.

b) Với m = 4, phương trình đường tròn tương ứng là

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25,$$

đường tròn này có tâm I(–4 ; 3) và R = 5. Gọi (d) là đường thẳng cần tìm. Đường thẳng (d) ⊥ (Δ) có phương trình $4x + 3y + c = 0$. Đường thẳng (d) cắt đường tròn tại A và B với AB = 6 nên nếu kẻ IH ⊥ AB tại H thì ta có $AH = \frac{1}{2}.AB = 3$. Theo định lí Pi-ta-go:

$$IH^2 = IA^2 - AH^2 = 25 - 9 = 16$$

suy ra IH = 4, đây là khoảng cách từ I đến đường thẳng (d). Ta có

$$\frac{|-16+9+c|}{\sqrt{16+9}} = 4 \Leftrightarrow \frac{-7+c}{5} = \pm 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = -13 \\ c = 27 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (d): 4x+3y-13=0 \\ (d): 4x+3y+27=0 \end{array}\right.$$

Vậy ta tìm được hai phương trình đường thẳng thoả mãn đề bài:

$$4x + 3y - 13 = 0\ ;\ 4x + 3y - 27 = 0.$$

Nhận xét. Để tìm quỹ tích một điểm M(x; y), ta thường dựa vào các tính chất đã cho để tính được x và y, phụ thuộc vào một tham số m nào đó. Sau đó, khử m, ta được phương trình biểu diễn đường chứa điểm M, đó chính là phương trình của quỹ tích. Tuy nhiên, cũng có khi tìm được ngay phương trình quỹ tích mà không cần khử tham số, như câu (a) của bài trên.

Bài 39. Với hai đường tròn có phương trình dạng tổng quát cho trước, hãy xác định phương trình *trục đẳng phương* của hai đường tròn.

Giải

Trong chương 2, ta đã biết rằng *trục đẳng phương* của hai đường tròn không đồng tâm là tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn đó. Cho hai đường tròn không đồng tâm (C): $x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2 = 0$.

Xét điểm M(x; y). Tâm và bán kính của (C) lần lượt là O(–A; –B), $R = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - C}$. Do đó, dễ dàng tính được

$$\mathscr{P}_{M/(C)} = OM^2 - R^2 = x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1.$$

Tương tự, $\mathscr{P}_{M/(C')} = OM^2 - R^2 = x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2$.

Như vậy, M có cùng phương tích đối với hai đường tròn khi và chỉ khi $x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2$, hay $2(A_1 - A_2)x + 2(B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0$. Do hai đường tròn cắt nhau nên chúng không đồng tâm, suy ra $A_1 - A_2$ và $B_1 - B_2$ không thể cùng bằng không. Vậy

$$2(A_1 - A_2)x + 2(B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0$$

là phương trình của đường thẳng. Đường thẳng đó chính là phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn đã cho.

Bài 40. Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn các hệ thức

$$a^2+b^2=4 \text{ và } c+d=5.$$

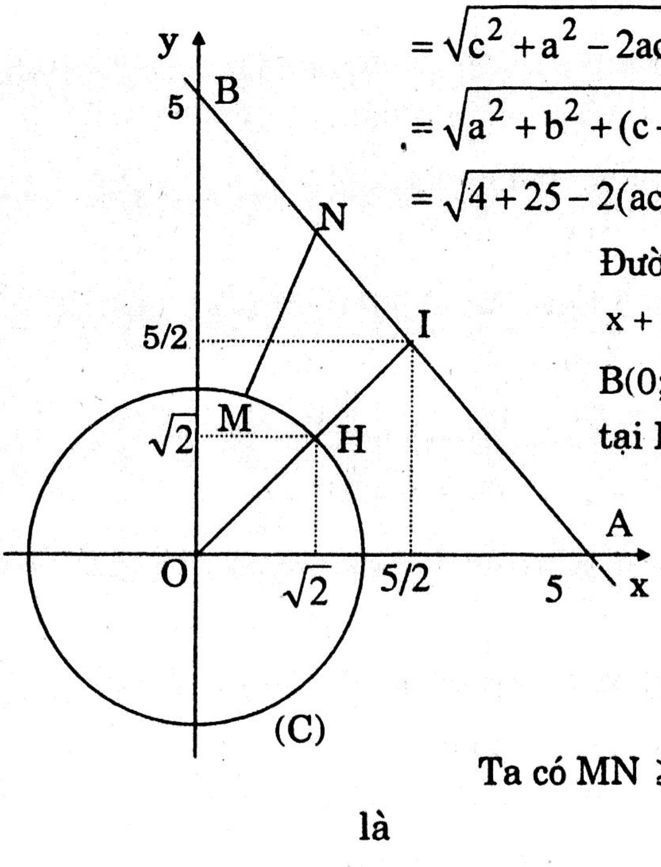
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T=ac+bd+cd$.

Nhận xét. Đây là bài toán đại số. Tuy nhiên, ở đây, ta có thể ứng dụng phương pháp tọa độ để giải bài toán này. Trong bài 41 dưới đây ta cũng áp dụng phương pháp này cho một bài toán hình học phẳng.

Giải

Trong mặt phẳng Oxy, ta xét điểm M(a,b) thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2=4$, thế thì M thuộc đường tròn (C) có tâm O, bán kính R = 2. Xét điểm N(c,d) thỏa mãn điều kiện $c+d=5$, N nằm trên đường thẳng có phương trình $x+y=5$, ta có:

$$\begin{aligned}MN &= \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}\\ &= \sqrt{c^2+a^2-2ac+d^2+b^2-2bd}\\ &= \sqrt{a^2+b^2+(c+d)^2-2cd-2ac-2bd}\\ &= \sqrt{4+25-2(ac+bd+cd)}=\sqrt{29-2(ac+bd+cd)}.\end{aligned}$$



Đường thẳng (D) có phương trình $x+y=5$ cắt x'x, y'y tại A(5; 0) và B(0; 5). Từ O vẽ $OI\perp AB$ và cắt (C) tại H. Ta có:

$$OI=\frac{AB}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$OH=R=2,$$

suy ra $HI=OI-OH=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-2.$

Ta có $MN\geq HI$, $\forall M\in(C)$, $\forall N\in(D)$, nghĩa là

$$\sqrt{29-2(ac+bd+cd)}\geq\frac{5\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\text{, hay}$$

$$29-2(ac+bd+cd)\ge\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}-2\right)^2=\frac{25}{2}+4-10\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(ac+bd+cd)\le\frac{25+20\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow(ac+bd+cd)\le\frac{25+20\sqrt{2}}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}M\equiv H\\ N\equiv I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=\sqrt{2}\\ c=d=\dfrac{5}{2}\end{cases}.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức T là $\frac{25+20\sqrt{2}}{4}$.

Bài 41. Cho hai đường tròn có bán kính bằng 1 và $\sqrt{2}$, khoảng cách giữa hai tâm bằng 2. Gọi X là một trong hai giao điểm của hai đường tròn. M là điểm nằm trên đường tròn nhỏ, Y là điểm nằm trên đường tròn lớn sao cho M là trung điểm XY. Tính khoảng cách XY.

Hướng dẫn

Chọn hệ thống trục với tâm đường tròn nhỏ làm gốc, trục hoành là đường nối tâm. Từ đó, tính được toạ độ X là

$$\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

Giả sử toạ độ M có dạng (cosk, sink). Suy ra toạ độ điểm Y là

$$\left(2\cos k-\frac{3}{4},\ 2\sin k-\frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

Vì Y nằm trên đường tròn có tâm là (2, 0), bán kính $\sqrt{2}$, nên

$$\left(2\cos k-\frac{11}{4}\right)^2+\left(2\sin k-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=2.$$

Suy ra $11\cos k+\sqrt{7}\sin k=10$. Ta có

$$XY^2=\left(2\cos k-\frac{3}{2}\right)^2+\left(2\sin k-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2=8-6\cos k-2\sqrt{7}\sin k$$

$$=8-6\cos k-2(10-11\cos k)=16\cos k-12.$$

Như vậy ta cần tìm cosk. Ta có $(10 - 11\cos k)^2 = 7(1 - \cos^2 k)$, suy ra $128\cos^2 k - 220\cos k + 93 = 0 \Leftrightarrow (32\cos k - 31)(4\cos k - 3) = 0$. Từ đó, $\cos k = \frac{3}{4}$, tương ứng với điểm X, nghiệm còn lại là $\cos k = \frac{31}{32}$. Suy ra $XY^2 = \frac{31}{2} - 12 = \frac{7}{2}$, $XY = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

P30. Mỗi phương trình trong các phương trình sau có phải là phương trình đường tròn không?

a) $x^2 + y^2 - 0,14x + 5\sqrt{2}y - 7 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2003x - 17y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 103 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x + 5y + 2 = 0$.

P31. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $2MA^2 - 3MB^2 = k^2$, trong đó, A(1 ; 1) và B(9 ; 7).

P32. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn

$$(C): x^2 + y^2 - 3x + y = 0$$

tại điểm gốc toạ độ O.

P33. Viết phương trình của đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ và đi qua điểm (2; 1).

P34. Cho hai đường tròn có phương trình tương ứng là

$$(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 2(m + 1)y - 1 = 0 \text{ và}$$

$$(C'_m): x^2 + y^2 - x + (m - 1)y + 3 = 0.$$

Tìm phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn. Khi m thay đổi, hãy chứng minh rằng các trục đẳng phương đó luôn đi qua một điểm cố định.

P35. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho ba điểm A(2; −4), B(4/3; 2/3), C(6; 0). Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

P36. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy cho ΔABC, với $A(3; -7)$, $B(9; -5)$, $C(-5; 9)$. Hãy viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

P37. Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $B(3; -11)$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $x + 2y = 0$.

c) Định m để đường thẳng $x + (m - 1)y + m = 0$ là tiếp tuyến của đường tròn.

P38. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$. Tìm phương tích của điểm $M(x_0; y_0)$ đối với đường tròn (C).

P39. Cho họ đường cong (C_m):

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 5m^2 - 1 = 0.$$

a) Chứng minh rằng họ (C_m) gồm những đường tròn luôn tiếp xúc với 2 đường thẳng cố định. Xác định phương trình hai đường thẳng cố định này.

b) Tìm m để (C_m) cắt (C): $x^2 + y^2 = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó, hãy chứng minh AB có phương không đổi khi m thay đổi trên những giá trị vừa tìm được.

§ 5. ĐƯỜNG ELIP, ĐƯỜNG HYPEBOL, ĐƯỜNG PARABOL, BA ĐƯỜNG CÔNIC

5.1. Tóm tắt kiến thức cần nhớ

- *Định nghĩa đường elip*

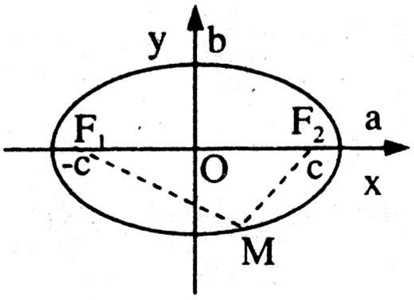
  Cho hai điểm cố định F_1 và F_2, với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$. Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ trong đó $a > c$ là số không đổi.

  Ta nói F_1 và F_2 là các *tiêu điểm* của elip. Khoảng cách 2c được gọi là *tiêu cự* của elip. Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 được gọi là các *bán kính qua tiêu* của điểm M (với M nằm trên elip).

- *Phương trình chính tắc của đường elip*

* Chọn hệ trục toạ độ sao cho trục hoành Ox đi qua hai tiêu điểm F_1 và F_2, còn trục Oy là đường trung trực của đoạn thẳng F_1F_2. Khi đó, phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó,

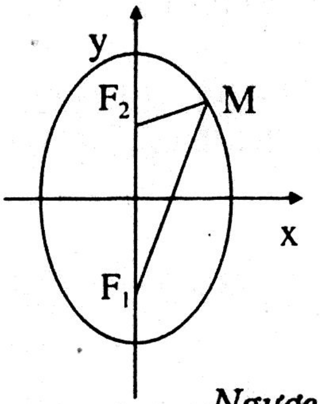
$a^2 - c^2 = b^2$, $a > b > 0$.



* Tương tự, nếu chọn hệ trục toạ độ sao cho Oy là đường thẳng đi qua hai tiêu điểm F_1 và F_2, còn Ox là trung trực đoạn F_1F_2 thì ta được phương trình elip có dạng:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

trong đó, $a^2 - c^2 = b^2$, $a > b > 0$.



Ngược lại: Nếu điểm M có toạ độ (x; y) thoả mãn một trong hai phương trình trên thì $MF_1 + MF_2 = 2a$, do đó M thuộc một elip.

Các phương trình trên được gọi là *phương trình chính tắc* của elip đã cho.

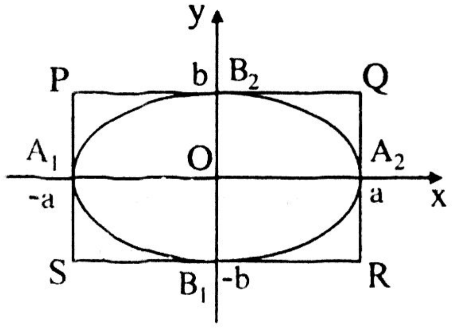
* *Công thức tính độ dài các bán kính qua tiêu điểm M:*

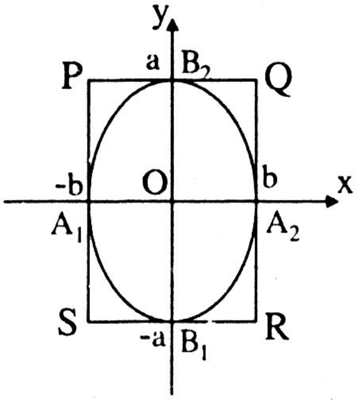
$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} \text{ và } MF_2 = a - \frac{cx}{a}.$$

- *Hình dạng và tâm sai của elip*

* *Hình chữ nhật cơ sở:* Elip có phương trình chính tắc sẽ nhận các trục toạ độ làm trục đối xứng và gốc toạ độ là tâm đối xứng. Nó cắt trục Ox tại hai điểm A_1 và A_2, cắt trục Oy tại hai điểm B_1 và B_2. Bốn điểm đó gọi là *đỉnh* của elip. Qua A_1 và A_2, vẽ hai đường thẳng song song với trục tung, qua B_1 và B_2, vẽ hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật PQRS. Ta gọi đó là *hình chữ nhật cơ sở* của elip. Chiều dài 2a và chiều rộng 2b của hình chữ nhật cơ sở lần lượt được gọi là *độ dài trục lớn* và *độ dài trục bé* của elip. Bốn đỉnh của elip nằm trên hình chữ nhật cơ sở. Bất

kì điểm nào của elip mà không phải là đỉnh cũng đều nằm bên trong hình chữ nhật cơ sở của nó.





* *Tâm sai của elip:* Ta gọi tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip là *tâm sai* của elip đó, kí hiệu là e. Như vậy $e = \frac{c}{a}$. Rõ ràng là $0 < e < 1$. Nếu tâm sai e càng bé (tức càng gần 0) thì hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó đường elip càng gần với đường tròn. Nếu tâm sai e càng lớn (tức càng gần 1) thì hình chữ nhật cơ sở của nó càng "dẹt", do đó đường elip cũng càng "dẹt".

- *Định nghĩa đường hypepol*

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$. *Đường hypebol* (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ trong đó a là số dương không đổi, $a < c$. Ta gọi F_1, F_2 là các *tiêu điểm* của hypebol.

Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ được gọi là *tiêu cự* của hypebol.

Nếu M là một điểm nằm trên Hypebol thì các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 được gọi là các *bán kính qua tiêu* của điểm M.

- *Phương trình chính tắc của hypebol*

Ta chọn một hệ trục toạ độ sao cho trục hoành Ox đi qua hai tiêu điểm F_1 và F_2. Trục Oy là đường trung trực của F_1F_2. Khi đó $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ và phương trình hypebol có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (*)$$

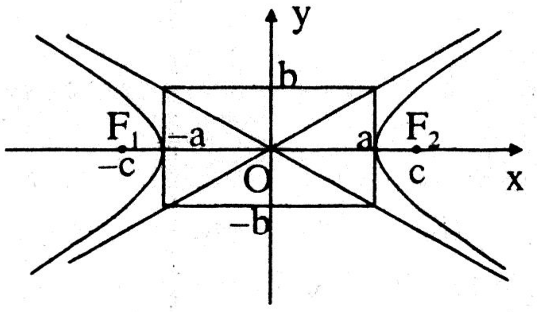
trong đó $b^2 = c^2 - a^2$. Nếu chọn trục tung đi qua hai tiêu điểm của hypebol thì phương trình hypebol có dạng:

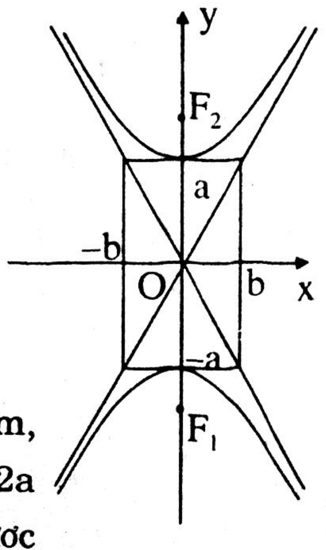
$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (**)$$

trong đó $b^2 = c^2 - a^2$. Các phương trình (*) và (**) được gọi là các *phương trình chính tắc* của hypebol.

- *Hình dạng của hypebol*

a) Gốc toạ độ O là tâm đối xứng; Ox, Oy là hai trục đối xứng của hypebol. Trục đối xứng chứa hai tiêu điểm được gọi là *trục thực*, trục kia được gọi là *trục ảo* của hypebol.





b) Hypebol (*) hoặc (**) cắt trục thực ở hai điểm, ta gọi là các *đỉnh* của hypebol. Khoảng cách 2a giữa hai đỉnh được gọi là *độ dài trục thực*, 2b được gọi là *độ dài trục ảo*.

c) Ta gọi tỉ số $\frac{c}{a}=e$ giữa tiêu cự và độ dài trục thực là *tâm sai* của đường hypebol. Chú ý rằng ta luôn có $e > 1$ (khác với trường hợp elip: $0 < e < 1$).

d) *Đường tiệm cận*: Hypebol $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ có hai đường tiệm cận là hai đường thẳng có phương trình

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ và } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

Hypebol: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ có hai đường tiệm cận là hai đường thẳng có phương trình

$$-\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=0 \text{ và } \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=0$$

Chú ý: Hypebol (với phương trình như trên) có hai đường tiệm cận vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a = b$.

- *Định nghĩa đường parabol*

  Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp những điểm M có khoảng cách đến F bằng khoảng cách từ nó đến Δ được gọi là *đường parabol* (hay parabol). Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là *đường chuẩn* của parabol. Khoảng cách $d(F,\Delta) = p$ từ F đến Δ được gọi là *tham số tiêu* của parabol.

- *Phương trình chính tắc của parabol*

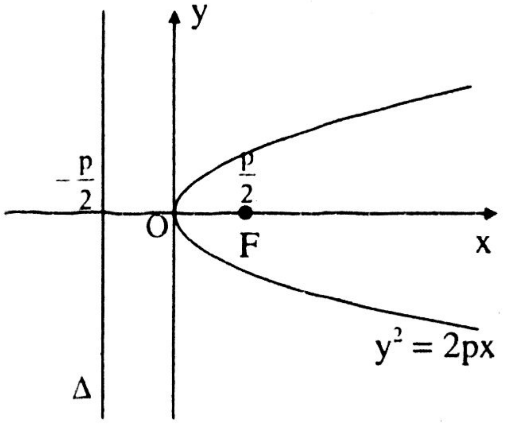
  Cho parabol với tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Chọn hệ trục toạ độ theo những cách khác nhau như hình bên dưới, ta sẽ có các dạng *phương trình chính tắc* của parabol như sau ($p > 0$):

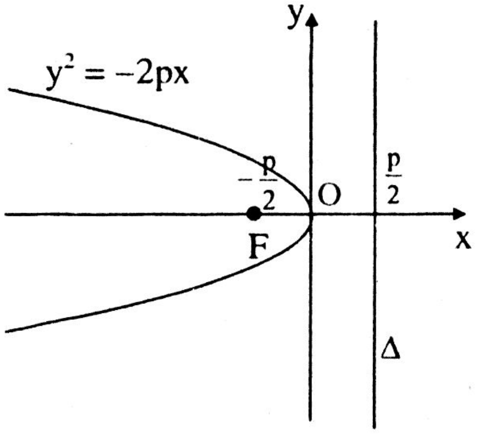
  a) $y^2 = 2px$. Tiêu điểm: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, đường chuẩn: $x + \frac{p}{2} = 0$.

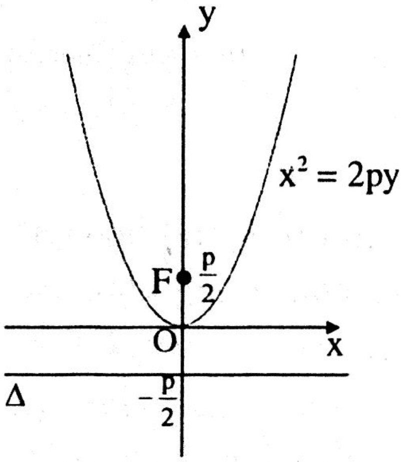
  b) $y^2 = -2px$. Tiêu điểm: $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, đường chuẩn: $x - \frac{p}{2} = 0$.

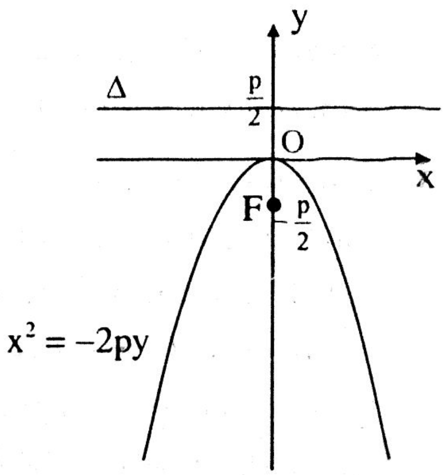
  c) $x^2 = 2py$. Tiêu điểm: $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, đường chuẩn: $y + \frac{p}{2} = 0$.

  d) $x^2 = -2py$. Tiêu điểm: $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, đường chuẩn: $y - \frac{p}{2} = 0$.









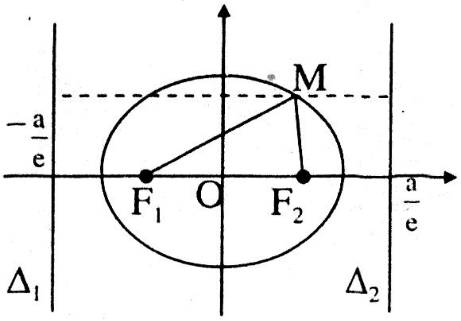
Các parabol trên có:

- Ox (hoặc Oy) là trục đối xứng của parabol.
- Parabol cắt trục Ox (hoặc Oy) ở một điểm O và đó cũng là điểm duy nhất trên Oy (hoặc Ox) thuộc parabol. Gốc toạ độ O được gọi là *đỉnh* của parabol.

- *Định nghĩa đường cônic*

Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\frac{MF}{d(M;\Delta)} = e$, với $e > 0$ là số không đổi, được gọi là một *đường cônic*. Ta gọi F là *tiêu điểm*, Δ là *đường chuẩn*, và e là *tâm sai* của cônic đó. Từ định nghĩa trên, kết hợp với tính chất của elip, parabol, hypebol, ta có kết luận: *Elip là đường cônic có tâm sai e < 1. Parabol là đường cônic có tâm sai e = 1. Hypebol là đường cônic có tâm sai e > 1.*

- *Đường chuẩn của elip*



Cho elip có phương trình chính tắc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0).$$

Khi đó, đường thẳng Δ_1: $x + \frac{a}{e} = 0$ được gọi là *đường chuẩn của elíp,* ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, đường thẳng Δ_2: $x - \frac{a}{e} = 0$ được gọi là *đường chuẩn của elip,* ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$.

Tính chất: Với mọi điểm M của elip ta luôn luôn có

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e\ (e < 1).$$

Đường chuẩn của hypebol

Cho hypebol (H) có phương trình: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, các đường thẳng Δ_1: $x + \frac{a}{e} = 0$ và Δ_2: $x - \frac{a}{e} = 0$ được gọi là *đường chuẩn* của (H) ứng với các tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

Tính chất: Với mọi điểm M của (H) ta luôn luôn có

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e > 1.$$

5.2. Một số dạng toán

Bài 42. Giả sử $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$, với $c > 0$. Chứng minh rằng nếu điểm M có toạ độ (x; y) thoả mãn phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó, $a^2 - c^2 = b^2$, $a > b > 0$, thì $MF_1 + MF_2 = 2a$, nghĩa là M thuộc một elip. (*Mệnh đề này có trong lí thuyết nhưng SGK không chứng minh*).

Giải

Giả sử điểm M có toạ độ (x; y), vì $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$ nên

$$MF_1^2 = (x + c)^2 + y^2\ ,\ MF_2^2 = (x - c)^2 + y^2.$$

Từ đó suy ra $MF_1^2 + MF_2^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2)$, $MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$. Vì M(x; y) thoả mãn phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và $a^2 - c^2 = b^2$ nên

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\Rightarrow a^2(x^2 + y^2 + c^2) = c^2x^2 + a^4 \Rightarrow x^2 + y^2 + c^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + a^2.$$

Do đó $MF_1^2 + MF_2^2 = 2\left(\frac{c^2}{a^2}x^2 + a^2\right)$ và $MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$. Từ đó,

$$MF_1^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = (\frac{c}{a}x + a)^2$$

$$MF_2^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = (\frac{c}{a}x - a)^2.$$

Mặt khác, do $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ nên suy ra $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$. Vì vậy ta có

$$\frac{c}{a}x + a = a + c\frac{x}{a} \geq a + (-1)c = a - c > 0$$

$$\frac{c}{a}x - a = c\frac{x}{a} - a \leq c.1 - a < 0.$$

Do đó ta được $MF_1 = \frac{c}{a}x + a$, $MF_2 = a - \frac{c}{a}x$, suy ra

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Vậy M thuộc elip.

Bài 43. Trong mặt phẳng toạ độ cho elip (E) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Xác định các tiêu điểm và tâm sai của (E).

b) Cho điểm M trên (E) sao cho $MF_1 - MF_2 = 2$. Tìm toạ độ của M. Viết phương trình của hypebol đi qua M và nhận hai đỉnh của (E) nằm trên trục tung làm tiêu điểm.

Giải

a) (E) có $a^2 = 8$, $b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$, do đó (E) có tiêu điểm $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$, có tâm sai: $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Điểm $M(x; y) \in (E)$ có:

$$\begin{cases} MF_1 = a + ex \\ MF_2 = a - ex \end{cases} \Rightarrow MF_1 - MF_2 = 2ex$$

$$MF_1 - MF_2 = 2 \Rightarrow ex = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Thay vào phương trình của (E) ta được $\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$. Đỉnh của (E) nằm trên Oy là $F_1'(0; -2)$, $F_2'(2; 0)$. Do hypebol có hai tiêu điểm

$F_1, F_2 \in Oy$ và đối xứng qua O nên nó có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$. Theo đầu bài ta có:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 = 4 \\ 2a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình của hypebol là $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = -1$.

Bài 44. a) Biết rằng khoảng cách từ một đỉnh nằm trên trục lớn đến một đỉnh nằm trên trục bé của một elip thì bằng tiêu cự của elip đó. Tính tâm sai của elip.

b) Tính tâm sai của một elip, biết rằng các đỉnh trên trục bé nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Giải

a) Không mất tính tổng quát, giả sử hai đỉnh là A = (a ; 0), B = (0 ; b). Khi đó AB = $\sqrt{a^2 + b^2}$. Nếu AB bằng tiêu cự thì

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2c \text{ hay } a^2 + b^2 = 4c^2 \Rightarrow a^2 + a^2 - c^2 = 4c^2.$$

Từ đó suy ra $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

b) Ta chọn phương trình elip dạng chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ để xét.

Giả sử M là một đỉnh trên trục bé và F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Vì ΔF_1MF_2 là tam giác vuông nên ta có ngay $OM = OF_2$ hay $b = c$ và $a^2 = b^2 + c^2 = 2c^2$ suy ra $a = c\sqrt{2}$.

Vậy tâm sai của elip là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 45. Cho các hypebol (H_1): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ và (H_2): $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Hãy xác định toạ độ các đỉnh, các tiêu điểm, tâm sai, độ dài trục thực và trục ảo của (H_1) và (H_2).

Giải

- Xét hypebol H_1, ta có $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ nên

$$a = 3,\ b = 2,\ c^2 = a^2 + b^2 = 13,\ c = \sqrt{13}.$$

Vậy hypebol có các tiêu điểm $F_1 = (-\sqrt{13}\,;\ 0)$, $F_2 = (\sqrt{13}\,;\ 0)$; các đỉnh $A_1 = (-3;\ 0)$, $A_2 = (3;\ 0)$; tâm sai $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$, độ dài trục thực $A_1A_2 = 6$; độ dài trục ảo $2b = 4$.

- Xét hypebol H_2, ta có $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ nên

$$a = 3,\ b = 2,\ c^2 = a^2 + b^2 = 13,\ c = \sqrt{13}.$$

Vậy hypebol có các tiêu điểm $F_1 = (0;\ -\sqrt{13})$, $F_2 = (0;\ \sqrt{13})$; các đỉnh $B_1 = (0;\ -3)$, $B_2 = (0;\ 3)$; tâm sai $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$, độ dài trục thực $B_1B_2 = 6$; độ dài trục ảo $2b = 4$.

Bài 46. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy cho các điểm A(−2; 0); B(2; 0); M(x; y).

a) Xác định toạ độ điểm M, biết rằng M nằm phía trên trục hoành, $\widehat{AMB} = 90^0$; $\widehat{MAB} = 30^0$.

b) Khi M chuyển động sao cho ΔAMB có $\widehat{MBA} = 2\widehat{MAB}$, chứng minh rằng M chạy trên một nhánh của hypebol.

Giải

a) *Cách 1.* Từ giả thiết ta có AM ⊥ BM. Giả sử M(x; y).

Do $\overrightarrow{AM}(x+2;\ y)$; $\overrightarrow{BM}(x-2;\ y)$ nên

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Vì $\widehat{MAB} = 30^0$ nên ta có hệ số góc của đường thẳng AM là $\text{tg}30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Từ đó, do AM đi qua A(−2, 0) nên dễ dàng suy ra phương trình đường thẳng AM là $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$.

Vậy tọa độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2) \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được nghiệm $x = 1$, $y = \sqrt{3}$. Vậy $M(1; \sqrt{3})$.

Cách 2. Do $\widehat{MAB} = 30^0$; $\widehat{MBA} = 60^0$ nên ΔMAB vuông ở M. Dễ thấy OBM là tam giác đều với cạnh bằng 2. Như vậy, khoảng cách từ M đến trục hoành là đường cao MH của tam giác OMB, tức là bằng $2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Ta cũng có OH = OB/2 = 1. Nói cách khác, điểm M có tung độ bằng $\sqrt{3}$ và hoành độ bằng 1, tức là

$$M(1; \sqrt{3}).$$

b) Lấy M' đối xứng của M qua trục tung. Do $\widehat{MAB} = 30^0$; $\widehat{MBA} = 60^0$, dễ dàng chứng minh được $\Delta MM'B$ cân tại đỉnh M. Ta có M'(–x; y) và M(x; y). Vì MM' = MB, ta có

$$\sqrt{(x+x)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \Leftrightarrow 3x^2 = -4x + 4 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1.$$

Đây là phương trình của một hypebol. Vì x > 0 nên M chỉ chạy trên một nhánh của hypebol này.

Bài 47. Cho parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx + 1$. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng luôn cắt parabol tại hai điểm phân biệt A và B. Hãy tìm quỹ tích tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác OAB khi m thay đổi (O là gốc tọa độ).

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng đã cho là: $x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$, phương trình này có $\Delta = m^2 + 4 > 0$ nên với mọi m, đường thẳng luôn cắt parabol tại hai điểm phân biệt $A(a, a^2)$ và $B(b, b^2)$. Vì hai điểm này nằm trên đường thẳng $y = mx + 1$ nên ta có:

$$\begin{cases} a^2 = ma + 1 \\ b^2 = mb + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = m \\ a^2 + b^2 = m^2 + 2 \\ ab = -1 \end{cases}.$$

Phương trình đường thẳng OA: $y = ax$, suy ra phương trình đường trung trực (d_1) của OA là $y = -\frac{1}{a}x + \frac{a^2+1}{2}$.

Phương trình đường thẳng OB: $y = bx$, suy ra phương trình đường trung trực (d_2) của OB là $y = -\frac{1}{b}x + \frac{b^2+1}{2}$.

Hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của:

$$-\frac{1}{a}x + \frac{a^2+1}{2} = -\frac{1}{b}x + \frac{b^2+1}{2}.$$

Từ đó, tọa độ giao điểm I của (d_1) và (d_2) là:

$$\left(\frac{-ab(a+b)}{2}, \frac{a^2+b^2+ab+1}{2}\right) = \left(\frac{m}{2}, \frac{m^2+2}{2}\right),$$

do đó, khử m, ta được tập hợp các điểm I là parabol có phương trình $y = 2x^2 + 1$.

Bài 48. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của biểu thức

$$A = 2x - y - 2$$

với (x; y) là toạ độ của điểm M chạy trên elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Giải

Ta có $2x - y = \frac{4x}{2} - \frac{3y}{3}$, theo bất đẳng thức Bunhiacopsky:

$$(2x-y)^2 = \left(4\frac{x}{2} - 3\frac{y}{3}\right)^2 \le (4^2+3^2)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) = 25.1 = 25$$

$$\Leftrightarrow |2x-y| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 2x - y \le 5 \Leftrightarrow -5-2 \le 2x-y-2 \le 5-2,$$

do đó, $-7 \le A \le 3$. Đẳng thức xảy ra khi x/8 = – y/9. Do đó:

MaxA = 3 khi $\begin{cases} -9x = 8y \\ 2x - y - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}; y = -\frac{9}{5}$ và

MinA = –7 khi $\begin{cases} -9x = 8y \\ 2x - y - 2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{8}{5}; y = \frac{9}{5}$.

Bài 49. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Chứng minh rằng hình chiếu của một tiêu điểm lên đường tiệm cận của hypebol này thì nằm trên đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm đó.

Giải

Cách 1. Ta chỉ cần chứng minh cho một tiêu điểm và một đường chuẩn tương ứng. Để cho gọn, ta gọi tiêu điểm F_2 là F. Kẻ FH ⊥ (d_1), với (d_1) là đường tiệm cận có phương trình $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ hay $bx - ay = 0$. Suy ra đường thẳng FH có vectơ chỉ phương $\vec{u}(b;-a)$ và do FH đi qua F(c, 0) nên nó có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = c + bt \\ y = -at \end{cases}.$$

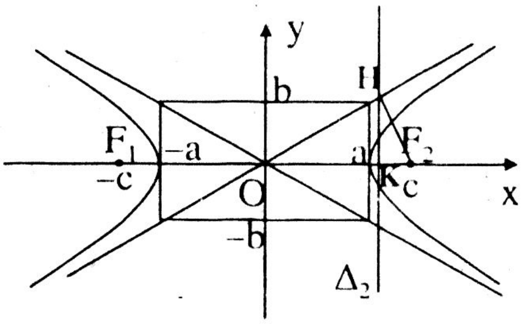
Thay vào phương trình (d_1) ta có:

$$b(c+bt)-a(-at)=0 \Rightarrow t=-\frac{bc}{a^2+b^2}=\frac{-bc}{c^2}=-\frac{b}{c}.$$

Từ đó, ta được hoành độ của H (giao điểm của tiệm cận và đường thẳng FH) là

$$x_H = c + b\left(-\frac{b}{c}\right) \Leftrightarrow x_H = \frac{c^2-b^2}{c}=\frac{a^2}{c}$$

Nhưng đường chuẩn Δ_2 tương ứng với tiêu điểm F_2 có phương trình là $x=\frac{a^2}{c}$. Vậy hình chiếu H của tiêu điểm F lên đường tiệm cận thì nằm trên đường chuẩn tương ứng.



Cách 2. Như trên, ta có (d_1): $bx - ay = 0$. Suy ra khoảng cách từ F đến đường tiệm cận (d_1) là $FH = \frac{bc}{\sqrt{b^2+a^2}}$.

Trong ΔOHF_2 vuông ở H ta có

$$OH^2 = OF^2 - FH^2 = c^2 - \frac{b^2c^2}{a^2+b^2} = c^2 - \frac{b^2c^2}{c^2} = c^2 - b^2 = a^2.$$

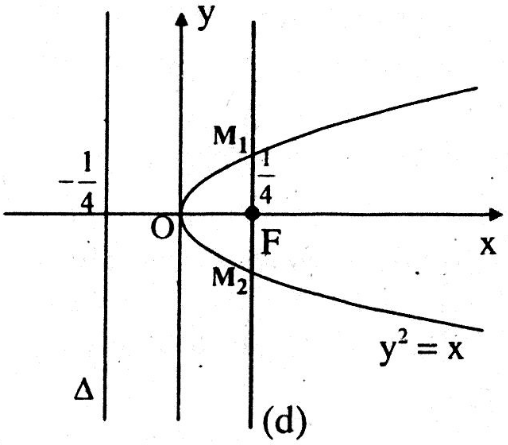
Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ H xuống trục Ox, ta có $OH^2 = OK.OF$, suy ra $OK = \frac{OH^2}{OF} = \frac{a^2}{c}$. Do đó K là giao điểm của đường chuẩn Δ_2 với trục hoành. Nói cách khác, đường thẳng KH chính là đường chuẩn Δ_2, suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Tính chất này còn đúng đối với hypebol

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Bạn đọc hãy tự chứng minh, hoàn toàn tương tự.

Bài 50. Cho parabol (P): $y^2 = x$ và đường thẳng (d) đi qua tiêu điểm F cắt (P) tại M_1 và M_2. Hãy xác định vị trí của (d) để M_1M_2 nhỏ nhất.



Giải

(a) Trước tiên, xét trường hợp (d) // Oy. Khi đó, đường thẳng (d) đi qua tiêu điểm F có phương trình $x = \frac{1}{4}$.

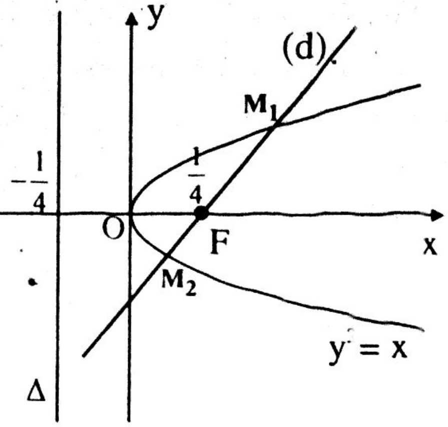
Suy ra tung độ giao điểm thỏa mãn

$$y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |y| = \frac{1}{2}.$$

Trong trường hợp này ta có

$M_1M_2 = 2|y| = 2.\frac{1}{2} = 1$. Vậy $M_1M_2 = 1$.

(b) Bây giờ, xét trường hợp (d) không song song với Oy. Giả sử hệ số góc của (d) là k, khi đó, đờng thẳng (d) qua F(1/4; 0) có phương trình:



$$y = k(x - \frac{1}{4}).$$

Toạ độ giao điểm của (d) với (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = kx - \frac{1}{4}k \end{cases}$$

Nghiệm của hệ trên là:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\left(1+\sqrt{1+k^2}\right)^2}{4k^2} \\ y_1 = \dfrac{\left(1+\sqrt{1+k^2}\right)}{2k} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_1 = \dfrac{\left(1-\sqrt{1+k^2}\right)^2}{4k^2} \\ y_1 = \dfrac{\left(1-\sqrt{1+k^2}\right)}{2k} \end{cases}$$

Như vậy, trong trường hợp này ta có

$$M_1M_2{}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \left(\frac{1+k^2}{k^2}\right)^2, \text{ hay } M_1M_2 = \frac{1+k^2}{k^2},$$

do đó $M_1M_2 = 1 + \frac{1}{k^2} \geq 1$. Điều này có nghĩa trường hợp (a) đã xét ở trên là thỏa mãn điều kiện M_1M_2 nhỏ nhất.

Tóm lại, M_1M_2 nhỏ nhất khi (d) ⊥ Ox.

P40. Viết phương trình chính tắc của đường elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) (E) có độ dài trục bé bằng 8 và tiêu cự bằng 4.

P41. Viết phương trình chính tắc của hypebol trong mỗi trường hợp sau:

a) Trị tuyệt đối hiệu các bán kính qua tiêu của điểm M bất kì trên hypebol là 8; tiêu cự bằng 10.

b) Có 2c = 10, 2a = 8 và tiêu điểm nằm trên Oy.

P42. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) có Ox là trục đối xứng và đi qua điểm M(–2; 5).

b) (P) có tiêu điểm F(3; 0).

c) (P) có tiêu điểm F(–4; 0).

d) (P) có tham số tiêu là $p = \frac{1}{3}$ và trục đối xứng là Oy.

P43. Cho đường thẳng Δ: $x - y - 1 = 0$ và điểm F(1; 1). Viết phương trình các đường cônic nhận F là tiêu điểm và Δ là đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Tâm sai e = 1; b) Tâm sai $e = \sqrt{2}$; c) Tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

P44. Tìm phương trình chính tắc của elip đi qua hai điểm M(1 ; 0) và $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ và xác định toạ độ hai tiêu điểm đó.

P45. Viết phương trình các đường cônic trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Tiêu điểm F(2; 3), đường chuẩn y = 0, tâm sai e = 1.

b) Tiêu điểm F(0; 3), đường chuẩn y = 0, tâm sai $e = \frac{1}{2}$.

P46. Cho elip có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Qua một tiêu điểm của elip này, ta kẻ đường vuông góc với trục hoành, đường thẳng này cắt elip tại A và B. Tính độ dài AB.

P47. Cho điểm M(1; 2) và elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xác định phương trình đường thẳng qua M, cắt (E) tại AB sao cho M là trung điểm của AB.

P48. Tìm quỹ tích các điểm M(x; y) với $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b\operatorname{tg}t$, trong đó t là tham số thực thoả điều kiện $t \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$.

P49. Một vệ tinh nhân tạo được phóng lên từ trái đất, nó chuyển động trên bầu trời theo quỹ đạo là một đường elip, elip này nhận tâm của trái đất làm một trong hai tiêu điểm. Theo quỹ đạo này, khoảng cách gần nhất và xa nhất của vệ tinh so với bề mặt trái đất tương ứng bằng 583 dặm và 1342 dặm (1 dặm ≈ 1,6 km). Tìm tâm sai của quỹ đạo đó.

P50. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm F nằm ngoài (O). Hãy tìm tập hợp các tâm của các đường tròn đi qua F và tiếp xúc với (O).

P51. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và hai đường thẳng (d): $ax - by = 0$; (d'): $bx + ay = 0$. Gọi M và N là giao điểm của (E) và (d); P, Q là giao điểm của (d') và (E).

a) Tính diện tích tứ giác lồi tạo bởi 4 điểm M, N, P, Q theo a và b.

b) Tìm điều kiện của a, b để diện tích MNPQ là nhỏ nhất.

P52. Cho elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

a) Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) nhận các tiêu điểm của (E) làm đỉnh và có hai tiêu điểm là hai đỉnh của elip (E).

b) Viết phương trình của đường tròn đi qua các giao điểm của hai đường elip (E) và hypebol (H).

P53. Cho đường elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. Ta gọi đoạn thẳng nối hai điểm của elip là *dây cung* của elip, trục chứa các tiêu điểm được gọi là *trục tiêu* của elip.

a) Tính độ dài dây cung của (E) đi qua một tiêu điểm và vuông góc với trục tiêu.

b) Tìm trên (E) điểm M sao cho $MF_1 = 2\,MF_2$ trong đó F_1 và F_2 lần lượt là các tiêu điểm của (E) nằm bên trái và bên phải trục tung.

P54. Cho $F_1(-\sqrt{5}\,; 0)$, $F_2(\sqrt{5}\,; 0)$ và $I(0; 3)$.

a) Hãy viết phương trình chính tắc của đường elip có tiêu điểm là F_1, F_2 và đi qua I.

b) Khi M chạy trên elip đó, khoảng cách MF_1 có giá trị nhỏ nhất và lớn nhất bằng bao nhiêu?

P55. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình: (d_1): $(a-b)x+y-1=0$ và

$$(d_2): (a^2-b^2)x+ay-b=0,$$

trong đó $b^2=4a^2+1$. Tìm quỹ tích các giao điểm M của (d_1), (d_2) khi a thay đổi.

P56. Cho elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với a > b. Tìm điểm M nằm trên elip sao cho $MF_1 = 2MF_2$, với F_1 và F_2 là hai tiêu điểm tương ứng nằm bên trái và bên phải của gốc toạ độ.

P57. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm tuỳ ý trên đường hypebol đến hai đường tiệm cận là một số không đổi.

P58. Cho parabol $y=\frac{1}{4}x^2$.

a) Xác định tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn.

b) Chứng minh rằng đường thẳng qua tiêu điểm có hệ số góc bằng k tùy ý sẽ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ sao cho $x_1x_2 = -4$.

P59. Xác định quỹ tích của tâm các đường tròn chắn trên hai trục Ox và Oy hai đoạn thẳng lần lượt bằng 2a và 2b.

P60. Cho parabol $y^2 = 2px$. Với mỗi điểm M trên parabol, gọi M' là hình chiếu của M trên Oy và I là trung điểm đoạn OM'. Chứng minh rằng đường thẳng IM cắt parabol tại một điểm duy nhất.

P61. Cho đường tròn (C) di động nhưng luôn đi qua hai điểm cố định P(–a; 0) và Q(a; 0). Cho MN là một đường kính của (C) mà MN // Ox. Tìm quỹ tích các điểm M, N.

P62. Cho đường parabol P_1: $y^2=2px$ và đường P_2: $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$. Chứng minh rằng nếu P_1, P_2 cắt nhau ở bốn điểm phân biệt thì các giao điểm đó cùng thuộc một đường tròn.

LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN CÁC BÀI TẬP CHƯƠNG 3

S1. $\vec{p} = (-1 ; 0)$, $\vec{q} = (0 ; 5)$, $\vec{a} = (2 ; 3)$; $\vec{b} = (\frac{1}{3} ; -5)$,

$\vec{c} = (3 ; -4)$, $\vec{d} = (-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$, $\vec{e} = (0,15 ; 1,3)$, $\vec{f} = (\pi; -\cos 24^0)$.

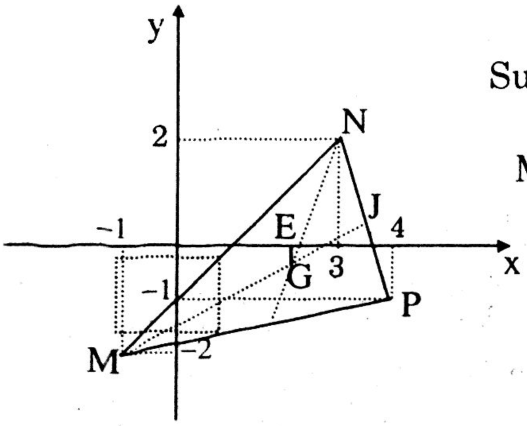
S2. **a)** Ta có $\overrightarrow{MN} = (4 ; 4)$, $\overrightarrow{MP} = (5 ; 1)$. Vì $\frac{4}{5} \neq \frac{4}{1}$ nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ không cùng phương, suy ra ba điểm M, N, P không thẳng hàng, do đó chúng là ba đỉnh của một tam giác.

b) $MN = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$, $MP = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$$NP = \sqrt{(4-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}.$$

Chu vi tam giác MNP bằng $4\sqrt{2} + \sqrt{26} + \sqrt{10}$.

c) Trung điểm J của cạnh NP có tọa độ là: $J\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$.



Suy ra độ dài trung tuyến MJ là

$$MJ = \sqrt{\left(\frac{7}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+2\right)^2} = \frac{\sqrt{106}}{2}.$$

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác MNP thì:

$$|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP}| = 3|\overrightarrow{EG}|.$$

Khi E chạy trên Ox, độ dài của đoạn EG sẽ nhỏ nhất khi E là hình chiếu của G trên Ox, do đó hoành độ của điểm E bằng hoành độ của điểm G. Vậy điểm E cần xác định là E(2; 0).

S3. Ta có: $\vec{a}(x ; y)$, $\vec{i}\,(1; 0)$, $\vec{j}\,(0; 1)$. Do đó

$$\vec{a}\,.\,\vec{i} = x.1 + y.0 = x,\quad \vec{a}\,.\,\vec{j} = x.0 + y.1 = y.$$

S4. Ta có $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $\vec{v} = (k ; -4)$.

a) $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ khi và chỉ khi $2k = \frac{4}{5}$ hay $k = \frac{2}{5}$.

b) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.k + (-5).(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$.

c) $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{101}$, $|\vec{v}| = \sqrt{k^2 + 16}$. Từ đó:

$$|\vec{v}| = |\vec{u}| \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{101} \Leftrightarrow k^2 + 16 = \frac{101}{4}$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}.$$

S5. **a)** $2\vec{a} = (6 ; 4)$; $-4\vec{c} = (8 ; 20)$. Ta có:

$$\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c} = (6 - 1 + 8 ; 4 + 5 + 20) = (13 ; 29);$$

$$\vec{v} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c} = (-15 ; -17);$$

$$\vec{w} = 2(\vec{a} + \vec{b}) + 4\vec{c} = (-4 ; -6).$$

b) $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 3p - q \\ -5 = 2p + 5q \end{cases}$.

Giải hệ phương trình trên ta được $p = -\frac{15}{17}$, $q = -\frac{11}{17}$.

S6. **a)** $\overrightarrow{AB} = (2 ; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-3 ; -3)$, hay $\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương, nghĩa là A, B, C thẳng hàng.

b) $\overrightarrow{AC} = (-1 ; -1)$ hay $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ nghĩa là A chia đoạn thẳng BC theo tỉ số -2.

$\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, nghĩa là B chia đoạn thẳng AC theo tỉ số $\frac{2}{3}$.

$\overrightarrow{CA} = (1\ ;\ 1)$; $\overrightarrow{CB} = (3\ ;\ 3)$ hay $\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, nghĩa là C chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{1}{3}$.

S7. **a)** $\overrightarrow{BA} = (0;\ -4)$; $\overrightarrow{BC} = (4;\ 0)$ là hai vectơ không cùng phương $\Rightarrow$ A, B C không thẳng hàng.

b) *Cách 1:* $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0$.

Cách 2: $AB^2 = (-1+1)^2 + (8-4)^2 = 16$,

$BC^2 = (3+1)^2 + (8-8)^2 = 16$,

$AC^2 = (3+1)^2 + (8-4)^2 = 32$.

Vì $AB^2 + BC^2 = 16 + 16 = 32 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông ở B.

b) $G = \left(\frac{-1-1+3}{3};\ \frac{4+4+8}{3}\right)$, $G = \left(\frac{1}{3};\ \frac{20}{3}\right)$,

$$\overrightarrow{GA} = \left(-\frac{4}{3};\ -\frac{8}{3}\right),\ \overrightarrow{GC} = \left(-\frac{8}{3};\ -\frac{4}{3}\right),$$

$\cos(\widehat{AGC}) = \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = 0{,}3$. Tra bảng, góc AGC = $72{,}54^0$.

Có thể dùng định lý cosin: $\cos\left(\widehat{AGC}\right) = \dfrac{GA^2 + GC^2 - AC^2}{2.GA.GC}$.

S8. HD: Tương tự.Bài 7. Để ý $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$. ĐS: S = 2 (đvdt).

S9. ĐS: M(6/5; 12/5); N(18/5; 12/5); P(18/5; 0); Q(6/5; 0).

HD: Gọi toạ độ $M(x_1;\ y_1)$; $N(x_2;\ y_1)$; $P(x_2;\ 0)$; $Q(x_1;\ 0)$,

$$M \in OB \Rightarrow \overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OB};\ 0 < m < 1.$$

Vì $N \in BC$ và MN // OC $\Rightarrow \overrightarrow{CN} = m\overrightarrow{CB}$, do đó

$$m = OM/OB = CN/CB,$$

từ đó $x_1 = 2m$; $x_2 = 6 - 2m$; $y_1 = 4m$.

Lại do MN = MQ nên ta có phương trình

$$(x_2 - x_1)^2 = y_1^2 \Rightarrow (6 - 6m)^2 = (4m)^2$$

suy ra m = 3/5 (thỏa mãn 0 < m < 1) ; m = 3 (loại).

Từ đó suy ra kết quả như trên.

S10. **a)** Phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$.

Phương trình chính tắc: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{3}$.

b) Phương trình tham số: $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases}$.

Phương trình chính tắc: $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}$.

S11. HD:

a) Vì $\frac{2}{4} \neq \frac{3}{5}$ nên hai đường thẳng đã cho cắt nhau.

b) Δ_1, Δ_2 cắt nhau **c)** $\Delta_1 // \Delta_2$ **d)** $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

S12. Giả sử đường thẳng cần tìm cắt trục Ox và Oy tại A(a ; 0) và B(0 ; b). Vì ΔOAB vuông cân nên | a | = | b | hay a = ±b. Phương trình đường thẳng AB (theo đoạn chắn) là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Mặt khác, nó phải đi qua điểm M(–2 ; –4) nên: $\frac{-2}{a}-\frac{4}{b}=1$.

- Nếu a = b thì: $\frac{-2}{a}-\frac{4}{b}=1 \Rightarrow \frac{-2}{a}-\frac{4}{a}=1 \Rightarrow a=-6\ ;\ b=-6$.

Ta được phương trình $\frac{x}{-6}+\frac{y}{-6}=1$ hay x + y + 6 = 0.

- Nếu a = –b thì: $\frac{-2}{a}-\frac{4}{b}=1 \Rightarrow \frac{-2}{a}+\frac{4}{a}=1 \Rightarrow a=2\ ;\ b=-2$.

Ta được phương trình: $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1$ hay x – y – 2 = 0.

S13. **a)** Ta có $\frac{A_1}{A_2}=\frac{2}{5}\neq\frac{-5}{2}=\frac{B_1}{B_2}$ nên hai đường thẳng cắt nhau, giải hệ phương trình, ta được giao điểm $\left(\frac{9}{29};\frac{21}{29}\right)$.

b) Ta có $\frac{A_1}{A_2}=\frac{1}{0,5}=\frac{-3}{-1,5}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{4}{4}=\frac{C_1}{C_2}$ nên hai đường thẳng song song nhau.

c) Ta có $\frac{A_1}{A_2}=\frac{10}{5}=\frac{2}{1}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{-3}{-1,5}=\frac{C_1}{C_2}$ nên hai đường thẳng trùng nhau.

S14. Phương trình dạng tham số của Δ là $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$. Vì $P \in \Delta$ nên $P(t, 2 + t)$. Từ điều kiện PA = PB, ta có phương trình :

$$t^2 + (t - 2)^2 = (t - 4)^2 + (11 + t)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t^2 - 4t + 4 = t^2 - 8t + 16 + 121 + 22t + t^2$$

$$\Leftrightarrow 18t - 133 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{133}{18}.$$

Suy ra toạ độ của điểm P là $\left(\frac{133}{18}; \frac{169}{18}\right)$.

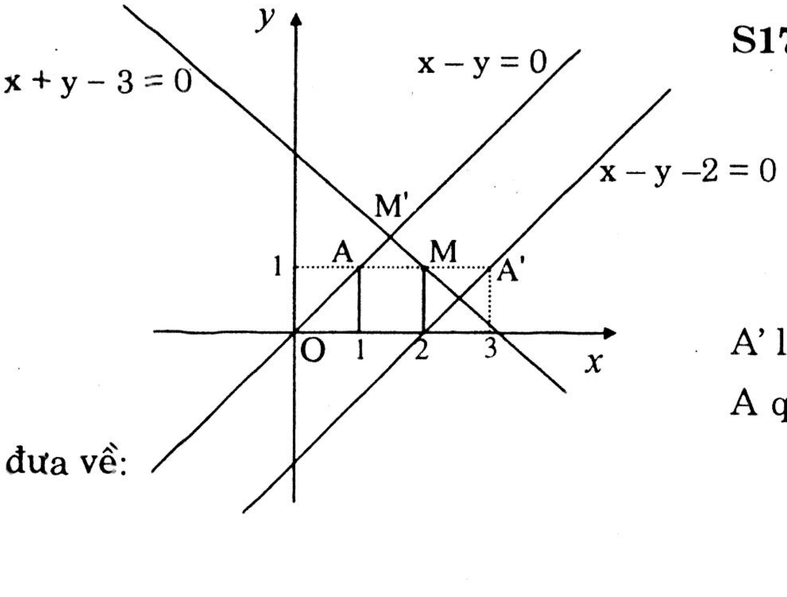
S15. HD: Hai đường thẳng (1) và (2) cắt nhau, trong khi đó, hai đường thẳng (1) và (3) song song nhau. Do đó, ba đường thẳng đã cho không đồng quy.

S16. Tọa độ của điểm B là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ x + 3y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}.$$

Suy ra $B\left(-2; -\frac{5}{3}\right)$. Lấy hai điểm $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $N\left(-\frac{1}{5}; 0\right)$ thuộc AC thì vectơ $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{2}\right)$ là vectơ pháp tuyến của đường cao BB' của tam giác ABC. Phương trình BB' là:

$$-\frac{1}{5}(x + 2) - \frac{1}{2}(y + \frac{5}{3}) = 0 \quad \text{hay} \quad 2x + 5y + \frac{37}{3} = 0.$$



S17. a) ***Cách 1.*** Để ý rằng $M \notin d$ nên đường thẳng d' đối xứng với d qua M sẽ song song với d. Lấy điểm $A \in d$, gọi A' là điểm đối xứng với A qua M thì $A' \in d'$. Bài toán đưa về:

Viết phương trình đường thẳng qua A' *và song song với* d.

Lấy A(1; 1) $\in$ d, giả sử A'(x'; y') đối xứng với A qua M, ta có

$$\begin{cases} x'+1=4 \\ y'+1=2 \end{cases}.$$

Suy ra A'(3; 1). Phương trình đường thẳng d' có dạng:

$$1(x-3)-1(y-1)=0 \text{ hay } x-y-2=0.$$

Cách 2. Xét tập hợp những điểm A' đối xứng với A qua M khi A chạy trên d. Đặt A(x_0; y_0) chạy trên d và A'(x; y) là điểm đối xứng với A qua M. Ta có

$$\begin{cases} x+x_0=4 \\ y+y_0=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=4-x \\ y_0=2-y \end{cases}.$$

Do A $\in$ d nên $x_0-y_0=0$. Vậy

$$(4-x)-(2-y)=0 \Leftrightarrow -x+y+2=0.$$

Đây chính là phương trình của d'.

b) Gọi M' là hình chiếu của M xuống đường thẳng d. Xét đường thẳng $\Delta \perp$ d tại M. Như thế, M' chính là giao điểm của d và Δ. Đường thẳng Δ có phương trình: $x+y+m=0$. Ta có

$$M \in \Delta \Leftrightarrow 2+1+m=0 \Rightarrow m=-3.$$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $x+y-3=0$. Toạ độ M', là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$. Vậy $M'\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

S.18. Thông thường, cách giải như sau cho kiểu bài toán này: lập phương trình đường thẳng Δ, trung trực của AB. Giải hệ phương trình để xác định giao điểm (d) và (Δ), ta được tọa độ của C.

Tuy nhiên, trong trường hợp này, rõ ràng hai điểm A(1; 2), B(–1; 2) đối xứng nhau qua trục tung, do đó đường thẳng Δ chính là trục tung. Giao điểm của trục tung và d có hoành độ bằng 0.

Thay $x = 0$ vào $x - 2y + 1 = 0$ ta được $y = \frac{1}{2}$. Vậy $C(0 ; 1/2)$.

S19. **a)** Với $y = 0$ thì $0 = -5 + 3t$ hay $t = \frac{5}{3}$, nên $x = 1 + \frac{5}{3}.2 = \frac{13}{3}$.

Vậy đường thẳng cắt trục hoành tại điểm $A(\frac{13}{3} ; 0)$.

Với $x = 0$ thì $0 = 1 + 2t$, suy ra $t = -\frac{1}{2}$. Khi đó:

$$y = -5 + 3t = -5 - \frac{3}{2} = -\frac{13}{2}.$$

Vậy đường thẳng cắt trục tung tại điểm $B(0 ; -\frac{13}{2})$.

b) Thử trực tiếp toạ độ của các điểm đã cho vào phương trình tham số, ta thấy các điểm B, D, nằm trên đường thẳng, các điểm A và C không nằm trên đường thẳng.

S20. Gọi I là trung điểm của BC thì $I = (2 ; 3)$. Xét đường thẳng qua $A(2 ; 5)$ và trung điểm $I(2 ; 3)$ của BC, đường thẳng này có phương trình $x = 2$. Ta dễ thấy hai khoảng cách từ B và C đến đường thẳng này bằng nhau.

Mặt khác, xét đường thẳng đi qua $A(2 ; 5)$ và song song với BC. Rõ ràng hai khoảng cách từ B và C đến đường thẳng này cũng bằng nhau. Ta có $\overrightarrow{BC} = 2(3 ; 1)$. Phương trình của đường thẳng này là: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$ hay $x - 3y + 13 = 0$.

S21. **a)** Gọi H là hình chiếu của M trên d thì $H(t; 1)$, suy ra $\overrightarrow{MH} = (t - 3; 3)$. Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0)$. Ta có $MH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{i} \Leftrightarrow t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$. Từ đó được $H(3; 1)$.

Cách khác: Gọi H là hình chiếu của M trên d thì H là giao điểm d và d', trong đó d' là đường thẳng qua M và $d' \perp d$. Ta cần xác định phương trình của d', sau đó, tìm giao điểm d và d'.

Phương trình của d' là $1.(x - 3) + 0.(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$. Đường thẳng d có phương trình tổng quát là $y - 1 = 0$. Từ đó suy ra $H(3; 1)$.

b) Phương trình dạng tham số của d:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -4t \end{cases}. \qquad (1)$$

Đường thẳng Δ' đi qua M và vuông góc với d có phương trình

$$3.(x - 3) - 4.(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 17 = 0. \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được: $3(1 + 3t) - 4(-4t) - 17 = 0 \Leftrightarrow 25t - 14 = 0$, do đó $t = \frac{14}{25}$. Thay $t = \frac{14}{25}$ vào (1), toạ độ hình chiếu của M là

$$\left(\frac{67}{25}; -\frac{56}{25}\right).$$

c) Gọi d' là đường thẳng qua M, vuông góc với d. Khi đó, d' có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; -12)$. Phương trình tham số của d' là:

$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -2 - 12t \end{cases}.$$

Thay vào phương trình của d ta được:

$$5(3 + 5t) - 12(-2 - 12t) + 10 = 0 \Leftrightarrow 168t + 49 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{49}{169}.$$

Từ đó ta có toạ độ hình chiếu (x ; y) của M lên d cho bởi

$$\begin{cases} x = 3 - 5.\frac{49}{169} = \frac{262}{169} \\ y = -2 + 12.\frac{49}{169} = \frac{250}{169} \end{cases}.$$

S22. HD: Nhận thấy điểm B không thuộc hai đường cao đã cho. Lập phương trình cạnh BA biết điểm B và vectơ chỉ phương chính là vectơ pháp tuyến của đường cao CC'. Tương tự, lập phương trình cạnh BC biết B và vectơ chỉ phương. Tìm toạ độ đỉnh A và C bằng cách giải hai hệ phương trình (BA) và đường cao (AA'); hệ phương trình (BC) và đường cao (CC'). Lập phương trình cạnh AC khi biết A và C. Kết quả:

(AB): $8x - 3y + 47 = 0$

(BC): $3x - 5y + 37 = 0$

(CA): $2535x - 3016y + 29033 = 0$.

S23. Ta có $d(M;\Delta) = \dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = h$

$$\Leftrightarrow |Ax+By+C| = h\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} Ax+By+C+h\sqrt{A^2+B^2}=0 & (1) \\ Ax+By+C-h\sqrt{A^2+B^2}=0 & (2) \end{array}\right.$$

Tập các điểm M là hai đường thẳng song song với đường thẳng đã cho, có phương trình tương ứng (1) và (2).

S24. Mệnh đề trên chỉ đúng trong trường hợp góc A của tam giác ABC là góc nhọn (suy từ định lí cosin). Khi góc A tù, ta có $\varphi = 180^0 - \hat{A}$, nên phải có

$$\cos\varphi = -\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}.$$

S25. Ta có $\overrightarrow{BC} = (-14; 14)$, $\overrightarrow{AC} = (-8; 16)$ và $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$.

Dễ thấy BC > AC > AB, vậy BC là cạnh lớn nhất, nên góc BAC là góc lớn nhất, ta phải lập phương trình đường phân giác trong của góc A.

Cạnh AB đi qua hai điểm A(3; –7) và B(9; –5) nên AB có phương trình:

$$\frac{x-3}{9-3} = \frac{y+7}{-5+7}, \text{ hay } x - 3y - 24 = 0.$$

Cạnh AC đi qua hai điểm A(3; –7) và C(–5; 9) nên AC có phương trình:

$$\frac{x-3}{-5-3} = \frac{y+7}{9+7}, \text{ hay } 2x + y + 1 = 0.$$

Phân giác góc A:

$$\frac{x-3y-24}{\sqrt{10}} = \pm\frac{2x+y+1}{\sqrt{5}}, \text{ suy ra}$$

$$(1+2\sqrt{2})x - (3-\sqrt{2})y + (\sqrt{2}-24) = 0,$$

hoặc $(1-2\sqrt{2})x - (3+\sqrt{2})y - (\sqrt{2}+24) = 0$.

Để xét xem một trong hai đường thẳng trên đường nào là phân giác trong của góc A, ta đặt

$$f(x, y) = (1+2\sqrt{2})x - (3-\sqrt{2})y + (\sqrt{2}-24) = 0.$$

Khi đó, $f(x_B; y_B).f(x_C; y_C) = f(9; -5).f(-5; 9) < 0$, suy ra đường phân giác vừa chọn là phân giác trong, đường thẳng còn lại là phân giác ngoài. Vậy phân giác trong của góc lớn nhất của ΔABC là:

$$(1+2\sqrt{2})x-(3-\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-24)=0\,.$$

S26. *Hướng dẫn:* Từ $I(x\,;\,x)$, kẻ $IE \perp Ox$ và $IF \perp Oy$. Suy ra OEIF là hình vuông có diện tích là x^2 và bằng diện tích hình bình hành ABCD. Từ đó, $|x| = 2$, suy ra toạ độ C, D. Đáp số: C(3; 4) và D(2; 4) hoặc C(–5; –4) và D(–6; –4).

S27. ***Cách 1:*** Gọi Δ là đường thẳng qua P và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a, b)$. Khi đó ta có Δ: $a(x-10) + b(y-2) = 0$.

Theo đề bài, Δ cách đều A, B nên

$$d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow \frac{|-7a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-15a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |7a+2b| = |15a-2b|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7a+2b=15a-2b\\ 7a+2b=-15a+2b\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}2a-b=0 & (1)\\ a=0 & (2)\end{array}\right.$$

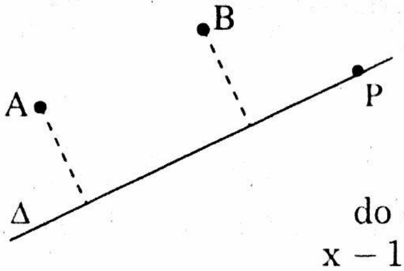
Với (1), ta lấy a = 1 thì b = 2. Khi đó phương trình Δ là:

$$x + 2y - 14 = 0.$$

Với (2), ta lấy b = 1. Khi đó phương trình Δ là: $y - 2 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng thoả mãn đề bài là $x + 2y - 14 = 0$ và $y - 2 = 0$.

Cách 2: Xét hai trường hợp:



Nếu A, B ở về một phía của Δ thì $d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow \Delta \,//\, AB$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-8, 4) = 4(-2,1),$$

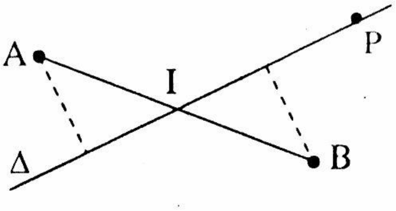
do đó phương trình của Δ là:

$$\frac{x-10}{-2} = \frac{y-2}{1} \text{ hay } x + 2y + 4 = 0.$$

Nếu A, B ở về hai phía của Δ thì

$d(A, \Delta) = d(B, \Delta)$

⇔ Δ đi qua trung điểm I của AB.



ta có $I(-1; 2)$, $\overrightarrow{PI} = (-11; 0)$, suy ra Δ: $y - 2 = 0$.

S28. Đường thẳng Δ cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt ở A, B. Gọi I là giao điểm của Δ_1, Δ_2 thì tam giác IAB là tam giác cân tại đỉnh I khi Δ vuông góc với phân giác trong của góc AIB.

Để giải bài toán ta viết phương trình các đường phân giác của các góc đỉnh I rồi viết phương trình đường thẳng qua P và vuông góc với một trong hai đường phân giác đó.

Phương trình hai đường phân giác là:

$$\frac{x + 2y - 3}{\sqrt{5}} = \frac{3x - y + 2}{\sqrt{10}} \ (m_1), \quad \frac{x + 2y - 3}{\sqrt{5}} = -\frac{3x - y + 2}{\sqrt{10}} \ (m_2) \text{ hay}$$

$$m_1: \quad (\sqrt{2} - 3)x + (2\sqrt{2} + 1)y - 3\sqrt{2} - 2 = 0$$

$$m_2: \quad (\sqrt{2} + 3)x + (2\sqrt{2} - 1)y - 3\sqrt{2} + 2 = 0.$$

Từ đó, ta viết được phương trình hai đường thẳng qua P và vuông góc với một trong hai đường phân giác đó.

Có hai đường thẳng cần tìm:

$$\frac{x - 3}{\sqrt{2} - 3} = \frac{y - 1}{2\sqrt{2} + 1} \text{ và } \frac{x - 3}{\sqrt{2} + 3} = \frac{y - 1}{2\sqrt{2} - 1}.$$

S29. ***Cách 1.*** Nhận thấy đường thẳng qua A có dạng $y = k_1x + 1$, với $k_1 \neq 0$, vì đường thẳng $x = 1$ không tạo với đường thẳng đã cho một góc 45^0. Ta có

$$x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

nên đường thẳng đã cho có hệ số góc $k_2 = -\frac{1}{2}$.

Sử dụng công thức trên với $\varphi = 45^0$, k_1 và k_2, ta có

$$1 = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{2} - k_1}{1 - \frac{1}{2}k_1}\right|, \text{ hay } \frac{\frac{1}{2} + k_1}{1 - \frac{1}{2}k_1} = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \frac{1}{3} \\ k_1 = -3 \end{array}\right. .$$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình

(Δ_1): $x - 3y + 3 = 0$ hoặc (Δ_2): $3x + y - 1 = 0$.

Cách 2. Đường thẳng qua (0; 1) có dạng

$$A(x - 0) + B(y - 1) = 0 \text{ hay } Ax + By - B = 0,$$

đường thẳng này có vectơ chỉ phương $\vec{u}(A;\ B)$. Đường thẳng đã cho $x + 2y + 3 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;\ 2)$. Ta có

$$\left|\cos(\vec{n};\vec{n}')\right| = \frac{|A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{5}} = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|A + 2B| = \sqrt{5}\sqrt{A^2 + B^2}$$

hay $2(A + 2B)^2 = 5(A^2 + B^2) \Leftrightarrow 8AB = 3A^2 - 3B^2$. Cho $A = 1$, ta tính được $B = -3$ hoặc $B = 1/3$ và suy ra kết quả như trên.

S30. HD: Để ý điều kiện $A^2 + B^2 > C$. (a), (b) và (c) là phương trình đường tròn; (d) thì không phải.

S31. Gọi toạ độ của M là (x ; y), với A(1 ; 1), B(9 ; 7), ta có:

$$2MA^2 - 3MB^2 = k^2 \Leftrightarrow 2(x - 1)^2 + 2(y - 1)^2 - 3(x - 9)^2 - 3(y - 7)^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - y^2 + 50x + 38y - 386 - k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 50x - 38y + 386 + k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 25)^2 + (y - 19)^2 = 600 - k^2. \ (*)$$

Vậy: • Nếu $k^2 < 600$, quỹ tích M là đường tròn có phương trình (*), với tâm I = (25 ; 19), và bán kính $R = \sqrt{600 - k^2}$.

• Nếu $k^2 = 600$, quỹ tích M là một điểm I = (25 ; 19).

• Nếu $k^2 > 600$, không tìm được điểm M nào thoả mãn điều kiện của đề bài.

S32. Do O thuộc đường tròn nên ta có phương trình tiếp tuyến tại O có dạng $(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$, trong đó I(a; b) là tâm. Mà (C) có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 3x + y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

nên $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Ngoài ra, $(x_0; y_0) = (0; 0)$ nên ta có phương trình tiếp tuyến tại O là $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$.

S33. Để ý rằng điểm (2; 1) nằm ở góc phần tư thứ nhất nên đường tròn qua điểm (2; 1) chỉ có thể tiếp xúc với hai trục lần lượt tại các điểm thuộc các nửa trục Ox, Oy. Từ đó, nếu đặt tâm I(a, b) và bán kính R thì phương trình của đường tròn là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \text{ với } a > 0, b > 0.$$

Đường tròn tiếp xúc với Ox $\Leftrightarrow |b| = R$.

Đường tròn tiếp xúc với Oy $\Leftrightarrow |a| = R$.

Kết hợp với điều kiện đường tròn đi qua điểm (2; 1) ta có phương trình:

$$(2 - a)^2 + (1 - a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a = 1 \,;\, a = 5.$$

* Với a = 1 ta có phương trình đường tròn:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

* Với a = 5 ta có phương trình đường tròn:

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Chú ý. Nếu không có nhận xét ban đầu, ta phải giải hệ:

$$\begin{cases}(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2 \\ |a| = |b|\end{cases}.$$

Khi a = b, ta được kết quả trên. Khi a = – b, hệ vô nghiệm.

S34. Phương trình của trục đẳng phương (xem Bài 39) của hai đường tròn (C_m) và (C'_m) là

$$x^2 + y^2 - 2mx + 2(m + 1)y - 1 = x^2 + y^2 - x + (m - 1)y + 3, \text{ hay}$$

$$(2m - 1)x - (3 + m)y + 4 = 0. \qquad (1)$$

Các trục đẳng phương đó luôn đi qua điểm cố định $P = \left(\frac{4}{7}; \frac{8}{7}\right)$. Thật vậy, giả sử các trục đẳng phương đó luôn đi qua điểm P(x; y), ta biến đổi phương trình (1) thành: $(2x - y)m - x - 3y + 4 = 0$. Do m tuỳ ý nên ta có hệ: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$, suy ra toạ độ của P là $\left(\frac{4}{7}; \frac{8}{7}\right)$.

S35. Dễ dàng tính được $AB = BC = \frac{10\sqrt{3}}{2}$ nên ΔABC cân tại B. Do đó, nếu kẻ $BH \perp AC$ thì H là trung điểm của BC, suy ra toạ độ H(4; −2), ngoài ra BH là phân giác của góc ABC. Kẻ phân giác góc BAC, gọi I là giao điểm phân giác này với BH thì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Theo định lí đường phân giác, vì AI là phân giác góc BAH nên: $\frac{IB}{IH} = \frac{AB}{AH}$. Ta lại có

$$AB = BC = \frac{10\sqrt{3}}{2},\ AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$$

nên $\frac{IB}{IH} = \frac{5}{3}$. Suy ra $-3\overrightarrow{IB} = 5\overrightarrow{IH}$, hay

$$-3(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) = 5(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OI}) \Leftrightarrow 8\overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OH}.$$

Từ đó, suy ra tọa độ tâm đường tròn nội tiếp là I(3 ; − 1) và bán kính là $r = IH = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

S36. Phương trình đường tròn (C) qua A, B, C có dạng

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

Vì (C) đi qua A(3; −7), B(9; −5), C(−5; 9) nên ta nhận được ba phương trình tương ứng:

$$9 + 49 - 6a + 14b + c = 0. \quad (1)$$

$$81 + 25 - 18a + 10b + c = 0. \quad (2)$$

$$25 + 81 + 10a - 18b + c = 0. \quad (3)$$

Lấy (2) trừ (3), suy ra a = b, thay vào (1) và (2) ta được

$$-48 + 16b = 0 \Rightarrow a = b = 3 \text{ và } c = -82.$$

Phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC là

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 82 = 0 \text{ hay } (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 100.$$

S37. Dễ thấy tâm là I(2 ; −4), bán kính $R = \sqrt{2^2 + 4^2 + 5} = 5$.

a) Bằng cách thay toạ độ của B(3 ; −11) vào phương trình, ta thấy không thoả mãn. Đường thẳng qua B(3 ; –11) có phương trình dạng $a(x-3)+b(y+11)=0$, trong đó $a^2+b^2 \neq 0$. Để đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn đã cho thì khoảng cách từ I(2 ; –4) đến nó phải bằng bán kính của đường tròn, từ đó ta có:

$$\frac{|a(2-3)+b(-4+11)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 5 \Rightarrow (-a+7b)^2 = 25(a+b^2)$$

$$\Rightarrow 12a^2 - 12b^2 + 7ab = 0. \qquad (1)$$

Vì a và b không thể đồng thời bằng 0 nên ta giả sử $b \neq 0$, ta có thể chia hai vế của (1) cho b^2 và được: $12(\frac{a}{b})^2 + 7(\frac{a}{b}) - 12 = 0$. Giải phương trình bậc 2 này đối với $\frac{a}{b}$ ta được $\frac{a}{b} = -\frac{4}{3}$ hoặc $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

- Nếu $\frac{a}{b} = -\frac{4}{3}$, ta chọn a = 4 ; b = –3 và được phương trình tiếp tuyến $4(x-3)-3(y+11)=0$ hay $4x-3y-45=0$.
- Nếu $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, ta chọn a = 3 ; b = 4 và được phương trình tiếp tuyến $3(x-3)+4(y+11)=0$ hay $3x+4y+35=0$.

b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+2y=0$ có phương trình $2x-y+C=0$. Khoảng cách từ tâm I(2 ; –4) của đường tròn tới tiếp tuyến đó phải bằng 5, tức là:

$$\frac{|4+4+C|}{\sqrt{4+1}} = 5 \Leftrightarrow |8+C| = 5\sqrt{5} \text{ hay } C = \pm 5\sqrt{5} - 8.$$

Vậy ta có hai tiếp tuyến: $2x - y \pm 5\sqrt{5} - 8 = 0$.

c) Khoảng cách từ tâm I(2 ; –4) của đường tròn tới đường thẳng $x+(m-1)y+m=0$ phải bằng bán kính. Vậy

$$\frac{|2-(m-1)4+m|}{\sqrt{1+(m-1)^2}} = 5 \Leftrightarrow (6-3m)^2 = 25(m^2-2m+2)$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 - 7m + 7 = 0\ ;$$

Phương trình này vô nghiệm. Vậy không có đường thẳng nào có dạng $x+(m-1)y+m=0$ mà tiếp xúc với đường tròn đã cho.

S38. Ta có $d^2 - R^2 = (x_0+A)^2 + (y_0+B)^2 - (A^2+B^2-C)$

$$= x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C$$

Ở đó d là khoảng cách từ M tới tâm đường tròn (C) và R là bán kính đường tròn (C). Vậy phương tích của điểm $M(x_0; y_0)$ đối với đường tròn (C) là $x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C$.

S39. **a)** Ta có (C_m): $(x-m)^2 + (y+2m)^2 = 1$. Vậy (C_m) là đường tròn có tâm I(m; –2m), có bán kính R = 1. Ta nhận thấy tâm I có toạ độ thoả mãn $x_I = m$; $y_I = -2m \Leftrightarrow y_I = -2x_I$, do đó tập hợp các tâm I là đường thẳng $y = -2x$, $\forall m$. Vì tâm của các (C_m) luôn nằm trên một đường thẳng cố định và các (C_m) luôn có bán kính bằng 1 nên chúng luôn tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song nhau, cách đường thẳng $\Delta: y = -2x$ một đoạn R = 1.

Từ đó, (d_1) và (d2) có phương trình dạng $y = -2x + c$, hay $2x + y - c = 0$. Mặt khác, ta có:

$$d(I, \Delta) = \frac{|2x_I + y_I - c|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2m - 2m - c|}{\sqrt{4+1}} = 1,$$

suy ra $c = \pm\sqrt{5}$. Vậy phương trình hai tiếp tuyến cố định của (C_m) là: $2x + y + \sqrt{5} = 0$ và $2x + y - \sqrt{5} = 0$.

b) Ta có (C): $x^2 + y^2 = 1$ có tâm O(0; 0); R' = 1.

Đoạn nối tâm OI là $\sqrt{m^2 + 4m^2} = \sqrt{5m^2}$. Ta giả sử $m \neq 0$ để (C_m) không trùng với (C). Điều kiện để hai đường tròn giao nhau là R – R' < OI < R + R' hay:

$$0 < \sqrt{5m^2} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2} < \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |m| < \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{5}} < m < \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vậy khi $m \in (-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}})$ $(m \neq 0)$ thì hai đường tròn giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Đường thẳng AB là trục đẳng phương của hai đường tròn, tất cả các điểm (a, b) nằm trên AB đều phải thoả mãn phương trình của hai đường tròn, do đó:

$$(x-m)^2 + (y+2m)^2 - 1 = x^2 + y^2 - 1 \Leftrightarrow 2x - 4y - 5m = 0.$$

Như vậy đường thẳng AB có phương trình $2x - 4y - 5m = 0$, nó có vectơ chỉ phương (2; 1) không đổi, suy ra đpcm.

S40. **a)** Trục lớn $2a = 8 \Rightarrow a = 4$. Từ $e = \frac{c}{a}$ suy ra $c = ae = 2\sqrt{3}$,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 12 = 4.$$

Nếu hai tiêu điểm thuộc Ox thì phương trình chính tắc của (E) là:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Nếu hai tiêu điểm thuộc Oy thì phương trình chính tắc của (E) là:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

b) ĐS: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ hoặc $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Chú ý. *Nếu chưa xác định được vị trí của hai tiêu điểm* thì ta phải xét cả hai trường hợp của vị trí tiêu điểm (trên trục tung hoặc hoành). Để ý điều tương tự như thế trong trường hợp hypebol.

S41. **a)** Theo đề bài $a = 4$ và $c = 5$. Ta có: $b^2 = c^2 - a^2 = 9$. Vậy phương trình chính tắc của hypebol là:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ hoặc } -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

b) $c = 5$, $a = 4$ và tiêu điểm nằm trên Oy nên phương trình chính tắc của hypebol là: $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

S42. **a)** Vì hoành độ của M là $x = -2 < 0$ và trục đối xứng của parabol là trục Ox nên phương trình chính tắc của parabol đó có dạng $y^2 = -2px$. Thay toạ độ của M vào phương trình ta được: $25 = -2p.(-2)$, suy ra $p = \frac{25}{4}$. Từ đó ta được phương trình chính tắc của parabol là: $y^2 = -\frac{25}{2}x$.

b) Vì tiêu điểm F(3; 0) (nằm trên trục hoành, bên phải O) nên $p = 6$ và parabol có phương trình $y^2 = 12x$.

c) Vì tiêu điểm F(–4; 0) (nằm trên trục hoành, bên trái O) nên $p = 8$ và parabol có phương trình $y^2 = -16x$.

d) (P) trục đối xứng là Oy nên có phương trình $x^2 = 2px$ (khi tiêu điểm nằm trên O) hoặc $x^2 = 2px$ (khi tiêu điểm nằm dưới O). Vậy phương trình parabol đã cho là $x^2 = \frac{2}{3}y$ hoặc $x^2 = -\frac{2}{3}y$.

S43. Gọi M(x; y) là điểm thuộc đường cônic, ta có:

a) $\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 4 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y.$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 6y + 3 = 0.$

Vậy phương trình đường cônic là $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 6y + 3 = 0$.

b) $MF = \sqrt{2}.d(M, \Delta) \Leftrightarrow MF^2 = 2d^2(M, \Delta)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2\frac{(x-y-1)^2}{2} \Leftrightarrow 2xy - 4y + 1 = 0.$

Vậy phương trình đường cônic là $2xy - 4y + 1 = 0$.

c) $\sqrt{2}\,MF = d(M, \Delta) \Leftrightarrow 2MF^2 = d^2(M, \Delta)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 10y + 7 = 0.$

Vậy phương trình đường cônic là

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 10y + 7 = 0.$$

S44. Phương trình chính tắc của elip có dạng: $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$. Elip đi qua M nên $\frac{1}{p^2} = 1$, $p^2 = 1$. Elip đi qua N nên $\frac{3}{4p^2} + \frac{1}{q^2} = 1$ Suy ra $q^2 = 4$. Vậy elip có phương trình: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$. Vì 4 > 1 nên trục tung đi qua hai tiêu điểm. Ta có $c^2 = 4 - 1 = 3$. Vậy toạ độ hai tiêu điểm là $F_1 = (0; -\sqrt{3})$ và $F_2 = (0; \sqrt{3})$.

Chú ý. Trong chương trình cũ (SGK, HH12), *chỉ thừa nhận một dạng phương trình chính tắc* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với a > b. Do đó, đối với chương trình cũ, cách giải như sau:

Giả sử elip có phương trình chính tắc dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Vì elip đi qua hai điểm M(1 ; 0) và $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ nên: $\frac{1}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1$ và $\frac{3}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1$. Suy ra $a^2 = 1$ và $b^2 = 4$. Ta không nhận được phương trình chính tắc của elip theo dạng trên, vì $a^2 < b^2$.

Các bạn lưu ý điều này để tránh nhầm lẫn.

S45. **a)** Giả sử có điểm M = (x ; y) thuộc cônic đã cho thì

$$MF=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}.$$

Khoảng cách d từ M đến đường chuẩn y = 0 là : d = |y|. Theo định nghĩa của đường cônic ta có $\frac{MF}{d}=e$ hay $\frac{MF}{|y|}=1$. Từ đó ta có $MF^2 = y^2$ hay $(x-2)^2 + (y-3)^2 = y^2$ hay $x^2 - 4x - 6y + 13 = 0$. Đó là phương trình cônic đã cho, cônic này là đường parabol vì e = 1.

b) Giả sử có điểm M = (x ; y) thuộc cônic đã cho thì

$$MF=\sqrt{x^2+(y-3)^2}.$$

Khoảng cách d từ M đến đường chuẩn y = 0 là d = |y |. Theo định nghĩa của cônic ta có: $\frac{MF}{d}=e$ hay $\frac{MF}{|y|}=\frac{1}{2}$ hay 2MF = |y|. Từ đó ta có $4[x^2 + (y-3)^2] = y^2$ hay $4x^2 + 3y^2 - 24y + 36 = 0$. Đó là phương trình cônic đã cho, nó là elíp vì e < 1.

S46. * Xét trường hợp a < b, ta thấy ngay độ dài của AB là 2b.

* Xét trường hợp elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với a > b. Đường thẳng vuông góc với Ox tại tiêu điểm này hoặc tiêu điểm kia đều cho ta độ dài AB bằng nhau. Do đó, có thể giả sử đường thẳng đó đi qua tiêu điểm $F_1 = (-c; 0)$, đường thẳng này có phương trình x = –c. Thay vào phương trình của elip ta được $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ hay

$$y^2 = b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{b^2}{a}.$$

Như vậy toạ độ hai giao điểm là

$$A = \left(-c;-\frac{b^2}{a}\right) \text{ và } B = \left(-c;\frac{b^2}{a}\right).$$

Suy ra ta có $AB = \dfrac{2b^2}{a}$.

Chú ý. Đề bài nói: *cho elip có phương trình* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, thì a và b ở đây là các số tuỳ ý chứ *không có nghĩa* là a > b như đã nói trong phần lí thuyết. Chú thích này rất quan trọng, vì nếu không để ý như thế, ta dễ chỉ xét một trường hợp a > b mà thôi.

S47. Giả sử đường thẳng (d) đi qua I có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt \end{cases}.$$

Để tìm toạ độ giao điểm A, B của d với elip $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, ta giải phương trình $\dfrac{(1+at)^2}{16}+\dfrac{(2+bt)^2}{9}=1$ hay

$$\left(\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{9}\right)t^2+2\left(\frac{a}{16}+\frac{2b}{9}\right)t-1+\frac{1}{16}+\frac{4}{9}=0. \qquad (1)$$

Dễ thấy phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu. Nếu t_1 và t_2 là hai nghiệm của phương trình (1) thì $A = (1+at_1 ; 2+bt_1)$ và $B = (1+at_2 ; 2+bt_2)$. Khi đó $\overrightarrow{MA} = (at_1 ; bt_1)$ và $\overrightarrow{MB} = (at_2 ; bt_2)$. Để M là trung điểm của AB cần có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, hay $t_1 + t_2 = 0$. Áp dụng định lí Viét vào phương trình (1) ta thấy tổng $t_1 + t_2 = 0$ khi và chỉ khi $\dfrac{a}{16}+\dfrac{2b}{9}=0$.

Chọn b = –9 và a = 32 ta được phương trình của đường thẳng (d) là

$$\begin{cases} x = 1 + 32t \\ y = 2 - 9t \end{cases} \text{ hay } 9x + 32y - 73 = 0.$$

S48. Ta có $x = \dfrac{a}{\cos t}$, $y = b\,\mathrm{tg}t$ nên $\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{\cos t}$, $\dfrac{y}{b} = \mathrm{tg}t$. Từ đó:

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \mathrm{tg}^2 t \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (*)$$

Quỹ tích các điểm M là hypebol có phương trình (*).

S49. Gọi tâm trái đất là F_2 và giả sử quỹ đạo chuyển động của vệ tinh có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó khoảng cách từ vị trí M bất kì của vệ tinh đến tâm trái đất là

$$d = MF_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

Do $-a \le x \le a$ nên $a - c \le d \le a + c$.

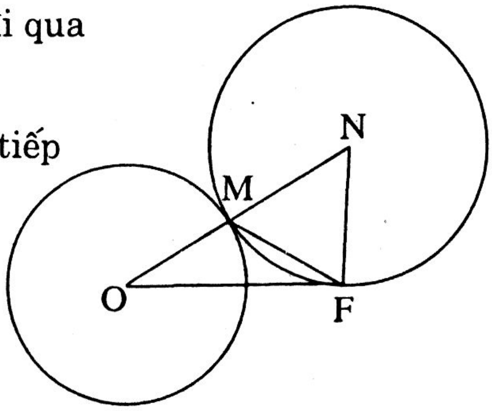
Gọi R là bán kính trái đất. Theo đề bài, ta suy ra khoảng cách gần nhất và xa nhất của vệ tinh so với tâm F_2 của trái đất tương ứng bằng 583 + R dặm và 1342 + R dặm. Do đó:

$$\begin{cases} a - c = 583 + R \\ a + c = 1342 + R \end{cases}.$$

Từ đó ta có 2c = 759; 2a = 1925 + 2R. Vậy tâm sai của quỹ đạo vệ tinh là

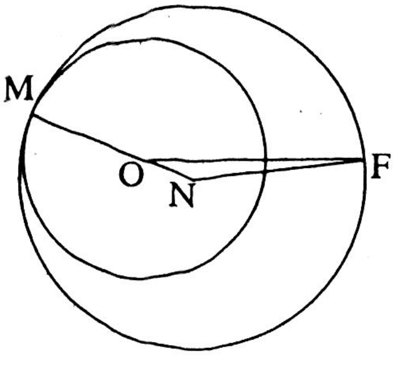
$$e = \frac{759}{1925 + 2R} = \frac{759}{1925 + 80000} \approx 0,009265.$$

S50. Gọi N là tâm của đường tròn đi qua F và tiếp xúc với (O).



Hai đường tròn (N) và (O) tiếp xúc ngoài ở M khi và chỉ khi:

$$ON = R + NM = R + NF$$
$$\Leftrightarrow NO - NF = R.$$



Nếu chúng tiếp xúc trong ở M thì ta có điều kiện tương đương là:

$$ON = NM - R = NF - R \Leftrightarrow NF - NO = R.$$

Tóm lại, N là tâm đường tròn qua F và tiếp xúc với (O) ở M khi và chỉ khi

$|NO - NF| = R$ không đổi. Vậy tập hợp các điểm N là hypebol nhận O, F làm hai tiêu điểm, độ dài trục thực bằng R.

S51. **a)** M và N là giao điểm của (E) và (d) nên toạ độ của chúng thoả mãn đồng thời hai phương trình của (d) và (E). Từ phương trình của (d) suy ra $ax = by \Rightarrow y^2 = \dfrac{a^2x^2}{b^2}$, thay vào phương trình của (E) ta có:

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{a^2x^2}{4b^2} = 1$, hay

$$4b^2x^2 + 9a^2x^2 = 36b^2 \Leftrightarrow x^2(4b^2 + 9a^2) = 36b^2, \text{ do đó}$$

$$x^2 = \frac{36b^2}{4b^2 + 9a^2}; y^2 = \frac{36a^2}{4b^2 + 9a^2} \Rightarrow OM^2 = x^2 + y^2 = \frac{36(a^2 + b^2)}{(4b^2 + 9a^2)}.$$

Mặt khác, vì đường thẳng (d) qua gốc toạ độ nên suy ra

$$MN = 2ON = 12\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(4b^2 + 9a^2)}}.$$

Tiếp theo, tương tự như trên, từ phương trình (d') suy ra

$$bx = -ay \Rightarrow y^2 = b^2x^2/a^2,$$

thay vào (E) như trên ta có: $x^2 = \dfrac{36a^2}{4a^2 + 9b^2}; y^2 = \dfrac{36b^2}{4a^2 + 9b^2}$, do đó

$$OP^2 = \frac{36(a^2 + b^2)}{4a^2 + 9b^2} \Rightarrow PQ = 2OP = 12\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)}{4a^2 + 9b^2}}.$$

Bây giờ, để ý rằng hai đường thẳng (d) và (d') vuông góc nhau, nên diện tích tứ giác lồi tạo bởi bốn điểm M, N, P, Q bằng nửa tích MN và PQ, do đó,

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MN.PQ = \frac{1}{2}.12\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)}{4a^2 + 9b^2}}.12\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)}{4b^2 + 9a^2}}$$

$$= \frac{72\left(a^2 + b^2\right)}{\sqrt{(4b^2 + 9a^2)(4a^2 + 9b^2)}}.$$

b) Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{(9a^2 + 4b^2)(4b^2 + 9a^2)} \le \frac{9a^2 + 4b^2 + 4b^2 + 9a^2}{2} = \frac{13}{2}(a^2 + b^2).$$

Vì vậy, S_{MNPQ} bé nhất là bằng

$$\frac{72(a^2+b^2)}{\frac{13}{2}(a^2+b^2)}=\frac{144}{13},$$

điều này xảy ra khi và chỉ khi $a^2 = b^2$.

S52. **a)** Elip có tiêu điểm (0; –4), (0; 4), các đỉnh (–3; 0); (3; 0) và (0; –5); (0; 5). Hypebol (H) có đỉnh (0; –4); (0; 4) thuộc trục tung nên có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$ với $c^2 = a^2 + b^2$. Suy ra hai tiêu điểm của (H) cũng nằm trên Oy, chúng là đỉnh của (E), nên hai tiêu điểm của (H) là các điểm (0; –5), (0; 5). Từ đó,

$$a = 4;\ c = 5 \Rightarrow b = 3.$$

Vậy phương trình hypebol là $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

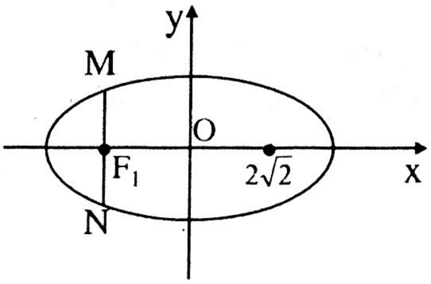
b) Từ hệ phương trình toạ độ giao điểm

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1\\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1\end{cases}$$

dễ dàng tính được $y^2=\frac{2}{\frac{1}{25}+\frac{1}{16}}=\frac{25.16.2}{41}$; $x^2=9\left(1-\frac{2.16}{41}\right)=9.\frac{9}{41}$.

Từ đó ta có: $x^2 + y^2 = \frac{551}{41}$. Vậy phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (E) và (H) là: $x^2+y^2=\frac{881}{41}$.

S53. **a)** ***Cách 1.*** Đường thẳng Δ qua tiêu điểm F_1 và vuông góc với Ox có phương trình $x=-2\sqrt{2}$. Gọi M, N là giao điểm của Δ với elip, khi đó M và N có hoành độ bằng $-2\sqrt{2}$. Tung độ của M và N là $\pm\frac{1}{3}$. Vậy $MN=|y_M - y_N|$.



Cách 2. Do tính đối xứng ta có $MN = 2MF_1$; dùng công thức tính MF_1 với $x_M = -2\sqrt{3}$, ta cũng được $MN = \frac{2}{3}$.

b) Giả sử M(x; y), từ công thức tính bán kính qua tiêu điểm, ta có: $MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 2(a - ex) \Leftrightarrow 3ex = a$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{3e} = \frac{a^2}{3c} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Do đó, $y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Vậy có hai điểm thoả mãn đề bài là:

$$M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{14}}{4}\right) \text{ và } M_2\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right).$$

S54. **a)** Giả sử elip có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, điểm I(0; 3) nằm trên elip nên: $\frac{0}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$, hay $b^2 = 9$. Theo giả thiết, tiêu cụ của elip là $2c = F_1F_2 = 2\sqrt{5}$. Vậy $c = \sqrt{5}$. Do đó, $b^2 = a^2 - c^2$ hay $a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 5 = 14$. Tóm lại, elip đã cho có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Ta có công thức về độ dài bán kính qua tiêu:

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a}.$$

Hiển nhiên $-a \le x \le a$ nên MF_1 nhỏ nhất khi $x = -a$ và lớn nhất là $x = a$. Vậy MF_1 có giá trị nhỏ nhất là $a - c = \sqrt{14} - \sqrt{5}$ và lớn nhất là $a + c = \sqrt{14} + \sqrt{5}$.

S55. Để ý rằng do điều kiện $b^2 = 4a^2 + 1$, không thể xảy ra trường hợp $b = 0$ hoặc $b = a$. Từ hệ

$$\begin{cases}(a-b)x + y = 1 \\ (a^2 - b^2)x + ay = b\end{cases},$$

ta suy ra toạ độ giao điểm M là $M(x; y) = M\left(-\frac{1}{b}; \frac{a}{b}\right)$.

Từ đây, kết hợp $b^2 = 4a^2 + 1$ suy ra tập hợp điểm M là elip có phương trình chính tắc:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1.$$

S56. Nếu điểm M(x ; y) nằm trên elip thì ta có các bán kính qua tiêu của điểm M là: $MF_1 = a + \frac{cx}{a}$, $MF_2 = a - \frac{cx}{a}$, với $F_1 = (-c ; 0)$, $F_2 = (c ; 0)$.

Vì $MF_1 = 2MF_2$ nên

$$a + \frac{cx}{a} = 2\left(a - \frac{cx}{a}\right) \text{ hay } x = \frac{a^2}{3c}.$$

Thay vào phương trình elip ta được $\frac{a^4}{a^2.9c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, hay

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{a^2}{9c^2}\right) = \frac{b^2(9c^2 - a^2)}{9c^2} = \frac{b^2(8a^2 - 9b^2)}{9c^2}.$$

Vậy: Nếu $8a^2 < 9b^2$, bài toán vô nghiệm.

Nếu $8a^2 > 9b^2$, có hai điểm thoả mãn là

$$M_1 = \left(\frac{a^2}{3c}; \frac{b\sqrt{8a^2 - 9b^2}}{3c}\right) \text{ và } M_2 = \left(\frac{a^2}{3c}; -\frac{b\sqrt{8a^2 - 9b^2}}{3c}\right).$$

Nếu $8a^2 = 9b^2$, chỉ có một điểm M(a ; 0).

S57. Xét hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hai đường tiệm cận của (H) là:

Δ_1: $y = \frac{b}{a}x$ hay $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$; Δ_2: $y = -\frac{b}{a}x$ hay $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

Điểm $M(x_0; y_0) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Ta có tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận không đổi, bởi vì

$$\frac{\left|\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} . \frac{\left|\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{\left|\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right|}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Với hypebol dạng chính tắc kia, tiến hành tương tự.

S58. **a)** Parabol đã cho có phương trình $x^2 = 4y$, do đó, $p = 2$. Ta có tiêu điểm $F\left(0; \frac{p}{2}\right) = (0; 1)$ và đường chuẩn

$$(\Delta): y + \frac{p}{2} = 0, \text{ hay } y = -1.$$

b) Đường thẳng qua tiêu điểm (0; 1) có hệ số góc k sẽ phương trình là $y = k(x - 0) + 1$ hay $y = kx + 1$. Hoành độ giao điểm của nó và parabol $y = \frac{1}{4}x^2$ là nghiệm của phương trình

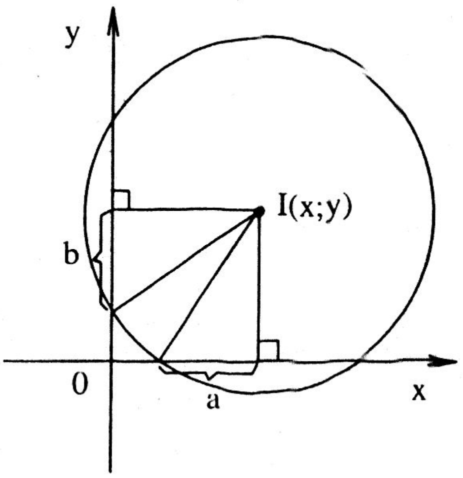
$$x^2 = \frac{1}{4}kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4kx - 4 = 0.$$

Vì $ac = -4 < 0$ nên phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt, nghĩa là đường thẳng luôn cắt parabol tại hai điểm $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$. Theo Định lí Viét ta có $x_1x_2 = -4$.

S59. Toạ độ (x; y) của tâm đường tròn thoả mãn phương trình

$$y^2 + a^2 = x^2 + b^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = b^2 - a^2.$$

Nếu $a = b$, ta có $(x - y)(x + y) = 0$, tập hợp cần tìm là hình gồm hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x$.



Nếu $b > a$, ta có $b^2 - a^2 > 0$, tập hợp đó là hypebol vuông $\frac{x^2}{b^2 - a^2} - \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1$, có đỉnh nằm trên trục hoành, độ dài trục thực bằng độ dài trục ảo và bằng $2\sqrt{b^2 - a^2}$.

Nếu $b < a$, ta có $a^2 - b^2 > 0$, tập hợp đó là hypebol vuông $-\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} = 1$, có đỉnh nằm trên trục tung, độ dài trục thực bằng độ dài trục ảo và bằng

$$2\sqrt{a^2 - b^2}.$$

S60. Ta có $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0^2 = 2px_0$. Dễ thấy $I\left(0; \frac{y_0}{2}\right)$ và phương trình đường thẳng IM là: $\frac{x}{x_0} = \frac{2y}{y_0} - 1$. Xét hệ

$$\begin{cases} y^2 = 2px & (1) \\ \frac{x}{x_0} = \frac{2y}{y_0} - 1 & (2) \end{cases}.$$

Từ 2) suy ra $x = \frac{2x_0}{y_0}y - x_0$. Thay vào (1) ta được:

$$y^2 = 2p\left(\frac{2x_0}{y_0}y - x_0\right).$$

Mặt khác, lại có $x_0 = \frac{y_0^2}{2p}$, vì vậy $y^2 = 2p\left(\frac{y_0 y}{p} - \frac{y_0^2}{2p}\right)$ hay

$$y^2 - 2y_0 y + y_0^2 = 0.$$

Phương trình trên có nghiệm kép $y = y_0$, suy ra IM chỉ có chung với (P) một điểm M duy nhất.

S61. Giả sử M(x; y), thế thì N(–x; y) (do MN // Ox) và tâm của đường tròn (C) là I(0; y). Khi đó IM = IN = IP = IQ, hay

$$IQ = \sqrt{a^2 + y^2} = \sqrt{x^2} = IM \Leftrightarrow a^2 + y^2 = x^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Vậy tập hợp các điểm M, N là hypebol vuông (tức có độ dài hai trục thực, ảo bằng nhau) có đỉnh P, Q, độ dài trục thực PQ = 2a.

S62. Để tìm toạ độ của hai đường đã cho ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = 2px & (1) \\ y = ax^2 + bx + c & (2) \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình (1) với a rồi trừ đi phương trình (2) ta được $ay^2 - y = 2apx - ax^2 - bx - c$ hay :

$$ax^2 + ay^2 - (2ap - b)x - y + c = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2ap - b}{a}x - \frac{y}{a} + \frac{c}{a} = 0. \quad (3)$$

Rõ ràng phương trình (3) là phương trình của một đường tròn. Vậy nếu hai parabol đó cắt nhau tại bốn điểm phân biệt thì bốn điểm đó nằm trên một đường tròn.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 2

1. Cho *hệ trục toạ độ* Oxy (hay $(O; \vec{i}, \vec{j})$).

(I) Theo tính chất vectơ ta luôn có: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = 0$.

(II) Nếu vectơ $\vec{a}$ có thể viết dưới dạng: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số (x; y) được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ và kí hiệu $\vec{a} = (x; y)$ hay $\vec{a}(x; y)$.

Trong hai câu trên :

(A) (I) đúng và (II) sai.
(B) (II) đúng và (I) sai.
(C) Cả hai đúng.
(D) Cả hai sai.

2. (I) M là trung điểm AB khi và chỉ khi toạ độ của M là trung bình cộng các toạ độ tương ứng của hai điểm A, B.

(II) G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi toạ độ của G là trung bình cộng các toạ độ tương ứng của ba đỉnh A, B, C.

Trong hai câu trên :

(A) (I) đúng và (II) sai.
(B) (II) đúng và (I) sai.
(C) Cả hai đúng.
(D) Cả hai sai.

3. Cho $\vec{a} = (x ; y)$ và $\vec{b} = (x' ; y')$, ta có :

(I) $\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = (\frac{x}{x'}; \frac{y}{y'})$, với $\vec{b} \neq (0;0)$;

(II) $k\vec{a} = (kx;ky)$; 3) $\vec{a}\vec{b} = xx'+yy'$;

(III) Với $x' \neq 0$, $y' \neq 0$, $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}.$$

Trong ba câu trên :

(A) Chỉ có (I) đúng.
(B) (I) đúng và (II) đúng.
(C) Cả ba đều đúng.
(D) Có không quá hai câu đúng.

4. (I) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$; (II) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x.x' - y.y'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

Trong hai công thức trên :

(A) (I) đúng và (II) sai.
(B) (II) đúng và (I) sai.
(C) Cả hai đúng.
(D) Cả hai sai.

5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ cũng được gọi là

(A) toạ độ của vectơ $\overrightarrow{MO}$.

(B) toạ độ của hình chiếu điểm M trên Oy.

(C) toạ độ của hình chiếu điểm M trên Ox.

(D) toạ độ của điểm M.

6. Cho hai điểm $M(x_M ; y_M)$ và $N(x_N ; y_N)$, khi đó:

(I) $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(x_N-x_M ; y_N-y_M)$;

(II) $|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}$.

Trong hai công thức trên :

(A) (I) đúng và (II) sai. (B) (II) đúng và (I) sai.

(C) Cả hai đúng. (D) Cả hai sai.

7. Cho điểm M(x; y), toạ độ của điểm đối xứng với M qua trục Ox là :

(A) (x; –y). (B) (–x; y). (C) (–x; –y). (D) (0; –y).

8. (I) Mỗi đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến, những vectơ pháp tuyến này song song nhau.

(II) Cho một điểm $M(x_0; y_0)$ và một vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$. Có duy nhất một đường thẳng đi qua M và nhận $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến.

Trong hai câu trên :

(A) (I) đúng và (II) sai. (B) (II) đúng và (I) sai.

(C) Cả hai đúng. (D) Cả hai sai.

9. Điều kiện cần và đủ để điểm N(x; y) nằm trên đường thẳng Δ đi qua $M(x_0, y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B)$ là

(A) $B(x - x_0) + A(y - y_0) = 0$.

(B) $B(y - y_0) = A(x_0 - x)$.

(C) $A(x + x_0) + B(y + y_0) = 0$.

(D) $A(x - x_0) - B(y - y_0) = 0$.

10. Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng là tập hợp những điểm :

(A) có toạ độ (x; y) thoả mãn phương trình $Ax + By + C = 0$.

(B) có toạ độ (x; y) thoả mãn phương trình $Ax - By + C = 0$, với $A^2 + B^2 \neq 0$.

(C) có toạ độ (x; y) thoả mãn phương trình bậc nhất đối với hai ẩn số $Ax + By + C = 0$, với $A^2 + B^2 = 0$.

(D) Tất cả các câu trên đều sai.

11. Phương trình $Ax + By + C = 0$ được gọi là *phương trình tổng quát* của đường thẳng, đường thẳng này nhận :

(A) $\vec{n}(-A, -B)$ là vectơ pháp tuyến.

(B) $\vec{n}(B, A)$ là vectơ pháp tuyến.

(A) $\vec{n}(-B, A)$ là vectơ pháp tuyến.

(A) $\vec{n}(A, B)$ là vectơ chỉ phương.

12. (I) Đường thẳng $Ax + C = 0$ vuông góc với trục Oy, đường thẳng này nhận $\vec{n}(A, 0)$ làm vectơ pháp tuyến.

(II) Đường thẳng $By + C = 0$ vuông góc với trục Ox, đường thẳng này nhận $\vec{n}(0, B)$ làm vectơ pháp tuyến.

(III) Đường thẳng $A x + By = 0$ đi qua gốc toạ độ, đường thẳng này nhận $\vec{n}(A, B)$ làm vectơ chỉ phương.

Trong ba câu trên :

(A) Chỉ có (I) đúng. (B) Chỉ có (II) đúng.

(C) Cả ba đều đúng. (D) Cả ba đều sai.

13. (I) Đường thẳng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ (a \neq 0, b \neq 0)$ đi qua hai điểm (a; 0) và (0; b), phương trình dạng như thế gọi là phương trình của đường thẳng theo đoạn chắn.

(II) Phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và song song với Ox, với $y_0 \neq 0$, là $y - y_0 = 0$.

(III) Đường thẳng OM, với $M(x_0; y_0)$ khác điểm O, có phương trình $y_0x - x_0y = 0$.

Trong ba câu trên :

(A) (I) và (II) đúng, (III) sai. (B) (II) sai.

(C) Cả ba đều đúng. (D) (I) sai.

14. Trong mặt phẳng toạ độ cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 :

Δ_1 : $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, Δ_2 : $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Hãy chọn câu sai :

(A) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau thì : $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

(B) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$.

(C) Hai đường thẳng trùng nhau khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

(D) Khi A_2, B_2, khác 0, ta có: Δ_1, Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

15. (I) Một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương, mỗi vectơ này vuông góc với mọi vectơ pháp tuyến.

(II) Nếu $\vec{n}(A; B)$ là một vectơ pháp tuyến thì $\vec{u}(B; A)$ là một vectơ chỉ phương.

(III) Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(x_0 ; y_0)$, biết vectơ chỉ phương $\vec{u}(a ; b)$ là

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$$

Trong ba câu trên :

(A) (I) và (II) đúng, (III) sai. (B) (I) sai.

(C) Cả ba đều đúng. (D) Có ít nhất một câu sai.

16. Cho đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a ; b)$.

(A) Ta luôn có thể viết phương trình đường thẳng đó dưới dạng chính tắc.

(B) Khi viết phương trình đường thẳng dưới dạng tham số, ta luôn có thể khử t để đưa về dạng chính tắc.

(C) Từ phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, ta suy ra phương trình chính tắc là $\frac{x + x_0}{a} = \frac{y + y_0}{b}$.

(D) Nếu a = 0 hoặc b = 0 thì đường thẳng đó không có phương trình chính tắc.

17. Cho các điểm A(1 ; 1), B(5 ; 1), C(3 ; 1), D(3 ; –2) và đường thẳng $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 + 3t \end{cases}$.

(A) Cả 4 điểm đều nằm trên đường thẳng.

(B) Có ba điểm nằm trên đường thẳng.

(C) Các điểm B, D, nằm trên đường thẳng, các điểm A và C không nằm trên đường thẳng.

(D) Không có điểm nào trong 4 điểm đã cho nằm trên đường thẳng đó.

18. Cho đường thẳng $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 5t \end{cases}$. Phương trình chính tắc và phương trình tổng quát của đường thẳng trên lần lượt là :

(A) $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y}{5}$ và $5x - 3y + 15 = 0$.

(B) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{-5}$ và $-5x - 3y + 15 = 0$.

(C) $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y}{5}$ và $5x + 3y + 15 = 0$.

(D) $\dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y}{5}$ và $5x - 3y - 15 = 0$.

19. Nếu đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_1 ; y_1)$ và $B(x_2 ; y_2)$ sao cho AB không song song với một trong hai trục tọa độ, thì phương trình đường thẳng đó là

(A) $\dfrac{x+x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y+y_1}{y_2-y_1}$.
(B) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

(C) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = -\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.
(D) $\dfrac{x-x_1}{x_2+x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2+y_1}$.

20. Hai điểm $M(x_M ; y_M)$, $N(x_N ; y_N)$ nằm cùng phía hoặc khác phía đối với đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ tương ứng với :

(A) Giá trị $(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C)$ dương hoặc âm.

(B) Giá trị $(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C)$ không âm hoặc không dương.

(C) Giá trị $(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C)$ âm hoặc dương.

(D) Giá trị $(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C)$ không dương hoặc không âm.

21. Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc, góc giữa hai đường thẳng a và b, kí hiệu (a, b), là :

(A) góc nào trong bốn góc đó cũng được.

(B) góc tù trong bốn góc đó.

(C) góc nhỏ nhất trong bốn góc đó.

(D) góc nhọn trong 4 góc đó.

22. Gọi $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a, b, ta có

(A) $(a, b) = (\vec{u}; \vec{v})$.

(B) $(a, b) = (\vec{u}; \vec{v})$ nếu $(\vec{u}; \vec{v}) \leq 90^0$;

$(a, b) = 180^0 - (\vec{u}; \vec{v})$ nếu $(\vec{u}; \vec{v}) > 90^0$.

(C) $(a, b) = (\vec{u}; -\vec{v})$.

(D) $(a, b) \perp (\vec{u}; \vec{v})$.

23. Giả sử có hai đường thẳng cho bởi phương trình $y = k_1x + b_1$ và $y = k_2x + b_2$. Gọi φ là góc giữa chúng, ta có:

(I) $\cos\varphi = \dfrac{|k_1k_2 + 1|}{\sqrt{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}}$ (II) $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$.

Trong hai công thức trên :

(A) (I) đúng và (II) sai. (B) (II) đúng và (I) sai.

(C) Cả hai đúng. (D) Cả hai sai.

24. (I) Phương trình đường tròn có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ hay $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$.

(II) Phương trình : $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ là phương trình của đường tròn với mọi A, B, C.

Trong hai câu trên :

(A) Chỉ có (I) đúng. (B) Chỉ có (II) đúng.

(C) Cả hai câu đều đúng. (D) Cả hai câu đều sai.

25. Phương trình $x^2 + y^2 + px + (p-1)y = 0$ là

(A) Phương trình của đường tròn tâm I(1, 2).

(B) Phương trình của đường tròn tâm $J\left(-\frac{p}{2};-\frac{p-1}{2}\right)$, bán kính R $= 3p^2 - p$.

(C) Phương trình của đường tròn tâm $J\left(-\frac{p}{2};-\frac{p-1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{2p^2 - 2p + 1}$.

(D) Phương trình của một đường tròn tâm I(1, 2), bán kính p.

26. Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$. Đây là đường tròn :

(A) Tâm I(2 ; –4), bán kính 5.

(B) Tâm I(–2 ; 4), bán kính 5.

(C) Tâm I(1 ; 3), bán kính 6.

(D) Tâm I(3 ; 1), bán kính 6.

27. Cho đường tròn (C) có tâm I(a; b), bán kính R và điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên (C). Phương trình đường thẳng tiếp xúc với (C) tại M là :

(A) $(a + x_0)(x - x_0) + (b + y_0)(y - y_0) = 0$.

(B) $(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$.

(C) $(a - x_0)(x + x_0) + (b - y_0)(y + y_0) = 0$.

(D) $(a + x_0)(x + x_0) + (b + y_0)(y + y_0) = 0$.

28. Cho đường tròn $x^2 + y^2 = 4$. Để tìm tiếp tuyến đi qua điểm (2; –2), một học sinh tiến hành như sau :

(I) Tiếp tuyến cần tìm có phương trình :

$$A(x - 2) + B(y + 2) = 0.$$

(II) Từ điều kiện tiếp xúc ta có :

$$\frac{|-2A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \text{, suy ra } A.B = 0.$$

(III) Nếu A = 0 và B ≠ 0, ta được tiếp tuyến $y + 2 = 0$.

Nếu B = 0 và A ≠ 0, ta được tiếp tuyến $x - 2 = 0$.

Nếu A = B = 0, không có tiếp tuyến.

Lí luận trên :

(A) Đúng hoàn toàn. (B) Sai từ giai đoạn (I).

(B) Sai từ giai đoạn (II). (B) Sai ở giai đoạn (III).

29. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}$, biết $\vec{u} + \vec{a} = 2\vec{b}$ với

$$\vec{a} = (1, -4),\ \vec{b} = (-6, 15).$$

(A) $\vec{u} = (13, 34)$; (B) $\vec{u} = (-13, 4)$;

(C) $\vec{u} = (34, 13)$; (D) $\vec{u}\ (-13, 34)$.

30. Cho A(–1, 3), B(1, 1), C(2, 5). Xác định toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

(A) G(1, 3) ; (B) G(3, 1) ; (C) $G(-2, -\frac{5}{2})$; (D) $G(\frac{2}{3}, 3)$.

31. Cho A(2, 1) ; B(1, – 3) ; C(3, 0). Xác định điểm D sao cho ABCD là hình bình hành (các đỉnh viết theo thứ tự vòng tròn).

(A) D(1, 3) ; (B) D(4, 4) ; (C) $D(\frac{17}{7}, 0)$; (D) D(–7, 19).

32. Cho A(2, 1) ; B(1, – 3) ; C(3, 0). Xác định điểm D sao cho ABDC là hình bình hành (các đỉnh viết theo thứ tự vòng tròn).

(A) D(–4, – 4) ; (B) D(2, – 4) ; (C) D(2, 4) ; (D) D(–7, 9).

33. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}$, biết $2\vec{u} - 3\vec{a} = \vec{b} + \vec{u}$ với

$$\vec{a} = (5, 6),\ \vec{b} = (-3, -1).$$

(A) $\vec{u} = (-15, 18)$; (B) $\vec{u} = (6, 5)$;

(C) $\vec{u} = (12, 17)$; (D) $\vec{u} = (-8, -7)$.

34. Cho A(2, 1) ; B(1, – 3). Tìm toạ độ giao điểm I của hai đường chéo hình bình hành OABC.

(A) $I(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; (B) $I(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$;

(C) I(2, 6) ; (D) $I(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

35. Cho M(1, 1) ; N(2, 3). Tính MN.

(A) $MN = \sqrt{5}$;　　(B) $MN = 2\sqrt{2}$;

(C) $MN = 17$;　　(D) $MN = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

36. Tính diện tích hình vuông ABCD, biết A(2, – 3) ; C(5, 2).

(A) S = 17 ;　(B) $S = 34\sqrt{2}$;　(C) S = 34 ;　(D) S = 23.

37. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$.

Đặt $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. Ta có :

(A) $\vec{u} = (-5 ; -8)$　　(B) $\vec{u} = (2 ; 5)$

(C) $\vec{u} = (2 ; -8)$　　(D) $\vec{u} = (3 ; 7)$

38. Tìm tọa độ của các vectơ sau:

$$\vec{p} = -\vec{i}\ ,\ \vec{q} = 5\vec{j}\ ,\ \vec{f} = \pi\vec{i} - \vec{j}\cos 24^0 .$$

(A) $\vec{p} = (-1 ; 0)$, $\vec{q} = (0 ; 5)$, $\vec{f} = (\pi; -\cos 24^0)$.

(B) $\vec{p} = (1 ; 0)$, $\vec{q} = (0 ; 5)$, $\vec{f} = (\pi; -\cos 24^0)$.

(C) $\vec{p} = (-1 ; 0)$, $\vec{q} = (0 ; 5)$, $\vec{f} = (\pi; \cos 24^0)$.

(D) $\vec{p} = (-1 ; 0)$, $\vec{q} = (2 ; 5)$, $\vec{f} = (\pi; -\cos 24^0)$.

39. Cho A(2, – 3), B(3, 4). Tìm điểm M trên trục hoành để A, B, M thẳng hàng.

(A) M(1, 0) ;　(B) M(4, 0) ;　(C) $M(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$;　(D) $M(\frac{17}{7}, 0)$.

40. Cho hai vectơ $\vec{e} = (4; 1)$ và $\vec{f} = (1; 4)$. Khi đó :

(A) $(\vec{e}, \vec{f}) \approx 72^0 11'$.　　(B) $(\vec{e}, \vec{f}) \approx 18^0 22'$.

(C) $(\vec{e}, \vec{f}) \approx 50^0 25'$.　　(D) $(\vec{e}, \vec{f}) \approx 61^0 55'$.

41. Cho A(0, 2) ; B (–1, – 2). Xác định tọa độ điểm M chia đoạn thẳng BA theo tỉ số – 2.

(A) $M(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$;　　(B) $M(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$;

(C) M(2, 6) ;　　(D) M(–8, – 7).

42. Cho $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (6, m)$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

(A) m = 3 ;　(B) m = – 2 ;　(C) m = 6 ;　(D) m = – 4.

43. Giả sử $\vec{e} = (4; 1)$ và $\vec{f} = (1; 4)$. Khi đó, để vectơ $\vec{a} = \vec{e} + m\vec{f}$ vuông góc với trục hoành thì :

(A) $m = 1$ (B) $m = -4$

(C) $m = 5$ (D) Một kết quả khác.

44. Cho ba điểm M(–1; –2), N(3; 2), P(4; –1).

(A) Ba điểm M, N, P là ba đỉnh của một tam giác cân tại N.

(B) Ba điểm M, N, P thẳng hàng.

(C) Ba điểm M, N, P là ba đỉnh của một tam giác.

(D) Tất cả các câu trên đều sai.

45. Cho ba điểm A(–4; 1), B(2; 4), C(2; –2). Khi đó :

(A) Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là (0, 7).

(B) Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là (7, 0).

(C) Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là (0; 1).

(D) Không tồn tại trọng tâm, vì A, B, C thẳng hàng.

46. Cho $\vec{a} = (x; y)$. Khi đó :

(A) $\vec{a}.\vec{i} = x$ và $\vec{a}.\vec{j} = y$. (B) $\vec{a}.\vec{i} = y$ và $\vec{a}.\vec{j} = x$.

(A) $\vec{a}.\vec{i} = 0$ và $\vec{a}.\vec{j} = 1$. (B) $\vec{a}.\vec{i} = 1$ và $\vec{a}.\vec{j} = 0$.

47. Ta có $\vec{u} = (4, 0) \,//\, \vec{v} = (2, m)$:

(A) với mọi m ; (B) không có m ;

(C) khi và chỉ khi m = 0 ; (D) m = 2.

48. Xác định các tiêu điểm, tâm sai của elip có phương trình

$$x^2 + 25y^2 = 25.$$

(A) $F(\pm \frac{3}{2}, 0)$; $e = \frac{3}{5}$; (B) $F(\pm \frac{\sqrt{11}}{30}, 0)$; $e = \frac{\sqrt{11}}{6}$;

(C) $F(\pm \sqrt{3}, 0)$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $F(\pm 2\sqrt{6}, 0)$; $e = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Ghi chú : Ở đây, F(± m, 0) là cách viết tắt của hai tiêu điểm (–m, 0) và (m, 0).

49. Viết phương trình chính tắc của elip mà elip này là tập hợp những điểm có tổng các khoảng cách đến (–6, 0) và (6, 0) bằng 14.

(A) $x^2 + 2y^2 = 36$; (B) $3x^2 + 5y^2 = 30$;

(C) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$; (D) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{13} = 1$.

50. (I) Nếu tâm sai e càng bé (tức càng gần 0) thì hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó đường elip càng gần với đường tròn.

(II) Nếu tâm sai e càng lớn (tức càng gần 1) thì hình chữ nhật cơ sở của nó càng "dẹt", do đó đường elip cũng càng "dẹt".

Trong hai câu trên :

(A) (I) đúng và (II) sai. (B) (II) đúng và (I) sai.

(C) Cả hai đúng. (D) Cả hai sai.

51. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn một elip có trục nhỏ là 16 và tâm sai e = $\frac{3}{5}$?

(A) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; (B) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$;

(C) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$; (D) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

52. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn một elip có tiêu cự 24 và tâm sai e = $\frac{12}{13}$?

(A) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; (B) $x^2 + 5y^2 = 25$;

(C) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; (D) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

53. Viết phương trình chính tắc của hypebol có 2c = 10, 2a = 8 và tiêu điểm nằm trên Oy.

(A) $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

(C) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (D) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ hoặc $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

54. Hypebol: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có hai đường tiệm cận là :

(A) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ và $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

(B) $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=0$ và $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$.

(C) $-\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$.

(D) $-\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=0$ và $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=0$.

55. Hypebol $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm là :

(A) $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$ (B) $F_1(-5; 0)$, $F_2(0 ; 5)$

(C) $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$ (D) Một kết quả khác.

56. Parabol có tiêu điểm: $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, đường chuẩn: $y + \frac{p}{2} = 0$ sẽ có phương trình là :

(A) $x^2 = 2py$. (B) $x^2 = -2py$. (C) $y^2 = 2px$. (D) $y^2 = -2px$.

57. Viết phương trình parabol (P) có tiêu điểm F(3, 0) và đỉnh là gốc toạ độ O.

(A) $y^2 = - 2x$; (B) $y^2 = 6x$;

(C) $y^2 = 12x$; (D) $y = x^2 + \frac{1}{2}$.

58. Xác định tiêu điểm của parabol có phương trình $y^2 = 6x$.

(A) $(0, - 3)$; (B) $(0, - 1)$; (C) $(\frac{3}{2}, 0)$; (D) $(0, -\frac{1}{4})$.

59. Xác định tiêu điểm, đường chuẩn của của parabol có phương trình $x^2 = - 12y$.

(A) $(0, - 3)$; $y = 3$; (B) $(0, - 3)$; $y = - 3$;

(C) $(0, 3)$; $x = 3$; (D) Một kết quả khác.

60. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn một elip có khoảng cách giữa các đường chuẩn là $\frac{50}{3}$ và tiêu cự 6 ?

(A) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$; (B) $\frac{x^2}{89}+\frac{y^2}{64}=1$;

(C) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$; (D) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

61. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn một hyperbol có khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng $\frac{48}{7}$ và có tâm sai $\frac{7}{2\sqrt{6}}$?

(A) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$; (B) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{392}=1$;

(C) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=1$; (D) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{9}=1$.

62. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn một hyperbol có khoảng cách giữa các đường chuẩn $\frac{32}{5}$, trục ảo bằng 6 ?

(A) $\frac{x^2}{169}-\frac{16y^2}{1521}=1$; (B) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$;

(C) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; (D) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

63. Xác định tiêu điểm, tâm sai của hyperbol (H) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{45}=1$.

(A) $F(\pm 7, 0)$; $e = 7$; (B) $F(\pm 5\sqrt{2}, 0)$; $e=\sqrt{\frac{2}{5}}$;

(C) $F(\pm\sqrt{233}, 0)$; $e=\frac{\sqrt{233}}{13}$; (D) $F(\pm\sqrt{13}, 0)$; $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

64. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn một hyperbol có hiệu khoảng cách đến hai điểm (± 5, 0) bằng ± 4 ?

(A) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{45}=1$; (B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$;

(C) $x^2-y^2=7$; (D) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. C	2. C	3. D	4. A	5. D	6. C	7. A	8. C
1. C	2. C	3. D	4. A	5. D	6. C	7. A	8. C
9. B	10. B	11. A	12. D	13. C	14. B	15. D	16. D
17. C	18. A	19. B	20. A	21. C	22. B	23. C	24. A
25. C	26. A	27. B	28. B	29. D	30. D	31. B	32. B
41. A	42. D	43. B	44. C	45. C	46. A	47. C	48. D
49. D	50. C	51. B	52. A	53. A	54. A	55. D	56. A
57. C	58. C	59. A	60. D	61. C	62. B	63. B	64. B

Một số bài toán ôn tập cuối năm

A. ĐỀ BÀI

P1. Cho hình thang ABCD vuông tại A và D có

$$AB = AD = \frac{1}{2}DC = 1.$$

a) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. Hãy biểu thị các vectơ sau đây qua hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$: $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}$

c) Tính cosin của góc hợp bởi hai vectơ $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

P2. Cho hai vectơ $\vec{e} = (4; 1)$ và $\vec{f} = (1; 4)$.

a) Tính góc $(\vec{e}, \vec{f})$.

b) Xác định tất cả các số m để vectơ $\vec{a} = \vec{e} + m\vec{f}$ vuông góc với trục hoành.

c) Xác định tất cả các số n để vectơ $\vec{b} = n\vec{e} + \vec{f}$ tạo với vectơ $\vec{i} + \vec{j}$ một góc 45^0.

P3. Tam giác ABC có a = 5, b = 4, c = 3. Lấy điểm D đối xứng với B qua C. Tính độ dài AD.

P4. Cho A(4 ; 5), B = (–6 ; –1), C = (1 ; 1). Viết phương trình các đường cao và các đường trung tuyến của tam giác ABC.

P5. Cho điểm A(0 ; 1) và hai đường thẳng d, d' lần lượt có phương trình $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$, $x + y + 1 = 0$.

a) Hãy tìm trên d các điểm M sao cho AM = 5.

b) Tìm tọa độ giao điểm của d và d'.

P6. Cho hình bình hành có một đỉnh là C(4; –1) và biết phương trình hai cạnh là: x – 3y = 0 và 2x + 5y + 6 = 0. Tìm ba đỉnh còn lại của hình bình hành đó.

P7. Tìm phương trình tham số và phương trình chính tắc của:

a) Đường thẳng đi qua I(0 ; 3) và vuông góc với đường thẳng có phương trình $2x - 5y + 4 = 0$.

b) Đường thẳng đi qua hai điểm A(1 ; 5) và B(–2 ; 9).

P8. Cho hai điểm O(0; 0) và A(2; 0).

a) Tìm điểm đối xứng của O qua Δ.

b) Tìm điểm M trên Δ sao cho OM + MA ngắn nhất.

P9. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho tam giác ABC biết A(1 ; 1), phương trình đường cao BH là:

$$-2x + y - 8 = 0$$

và phương trình đường cao CK: là $2x + 3y - 6 = 0$. Lập phương trình đường cao AE và tính tọa độ hai đỉnh B, C.

P10. Cho điểm M(2; 3). Viết phương trình đường thẳng cắt hai trục toạ độ ở A, B sao cho ABM là tam giác vuông cân tại M.

P11. Tính khoảng cách từ điểm M(4 ; –5) đến các đường thẳng:

a) $3x - 4y + 8 = 0$ b) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$.

P12. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho điểm A(1 ; 1) và đường thẳng (d): $4x + 3y = 12$. Gọi B và C lần lượt là giao của (d) với trục Ox, Oy. Tính toạ độ trực tâm H của ΔABC.

P13. Tìm tâm và bán kính của các đường tròn (nếu có) qua các phương trình sau:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 1 - m^2 = 0$

P14. Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

a) Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn.

b) Viết phương trình tiếp tuyến đi qua A(–1; 0).

P15. Cho hai đường tròn:

(C): $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$, (C'): $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$.

Tìm toạ độ các giao điểm của hai đường tròn đó.

P16. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x - y + 17 = 0$.

b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$.

c) Tiếp tuyến đi qua điểm $(2; -2)$.

P17. Cho ΔABC trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho biết $A(-1; 2)$; $B(2; 0)$; $C(-3; 1)$.

Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

P18. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn: (C) có phương trình $x^2 + y - 1 = 0$ và (C') có phương trình

$$(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 16.$$

P19. Viết phương trình các đường cônic trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Tiêu điểm $F(2; 3)$ và đường chuẩn $y = 0$, tâm sai $e = 1$.

b) Tiêu điểm $F(0; 3)$ và đường chuẩn $y = 0$, tâm sai $e = \frac{1}{2}$.

P20. Viết phương trình chính tắc của hypebol trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$, một đường tiệm cận là $y = \frac{2}{3}x$ và tiêu điểm nằm trên Ox.

b) Có tâm sai $e = \sqrt{5}$, đi qua điểm $\left(\sqrt{10}; 6\right)$ và tiêu điểm nằm trên Oy.

P21. Trong mặt phẳng toạ độ cho điểm $A(3; 5)$ và đường thẳng

$$\Delta: 2x - y + 3 = 0.$$

a) Viết phương trình đường tròn tâm A tiếp xúc với Δ.

b) Tìm toạ độ của điểm A' đối xứng với A qua Δ.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ' đi qua A sao cho

$$(\Delta; \Delta') = 60^0.$$

P22. Tìm quỹ tích tâm các đường tròn tiếp xúc với cả hai đường tròn ngoài nhau cho trước.

P23. Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tìm quỹ tích tâm các đường tròn thay đổi nhưng tiếp xúc với (O) và (d) tại hai điểm phân biệt.

P24. Cho parabol có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Gọi MN là dây cung của parabol đi qua tiêu điểm F (*dây cung* của parabol là đoạn thẳng nối hai điểm của parabol). Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN tiếp xúc với đường chuẩn của parabol.

P25. Cho một tam giác với ba đỉnh là ba điểm nguyên (tức là chúng có thành phần toạ độ nguyên). Biết rằng trên ba cạnh của tam giác không có điểm nguyên nào khác và bên trong tam giác có đúng một điểm nguyên.

Chứng minh rằng điểm đó phải là trọng tâm.

P26. Về phía bên trong hình vuông ABCD, ta dựng các tam giác đều ABK, BCL, CDM, DAN. Chứng minh rằng các trung điểm của KL, LM, MN, NK và các trung điểm của AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN tạo thành một đa giác đều 12 cạnh.

B. LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN

S1. **a)** $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$; $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{u} - \vec{v}$;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} = 2\vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} + \vec{v}$;

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{u} + \vec{v}$.

b) $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC} = (\vec{u} - \vec{v})(2\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u}^2 - \vec{u}^2 - \vec{u}.\vec{v} = 2 - 1 + 0 = 1$

c) Dùng định lí Pytago ta tính được : $DB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{5}$.

Theo định nghĩa tích vô hướng:

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC} = DB.AC.\cos\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}\right).$$

Vậy $1 = \sqrt{2}.\sqrt{5}.\cos\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

S2. **a)** $\cos(\vec{e}, \vec{f}) = \dfrac{4.1 + 1.4}{\sqrt{16+1}.\sqrt{1+16}} = \dfrac{8}{17}$, suy ra $(\vec{e}, \vec{f}) \approx 61^0 55'$.

b) Ta có $\vec{a} = (4 + m ; 1 + 4m)$. Do đó $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành khi và chỉ khi $\vec{a}.\vec{i} = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

c) Ta có $\vec{b} = (4n + 1; n + 4)$, $\vec{i} + \vec{j} = (1; 1)$. Vì vectơ $\vec{b} = n\vec{e} + \vec{f}$ tạo với vectơ $\vec{i} + \vec{j}$ một góc bằng 45^0 nên ta có

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0 = \frac{(4n+1)+(n+4)}{\sqrt{2}.\sqrt{(4n+1)^2+(n+4)^2}} = \frac{5(n+1)}{\sqrt{2}\sqrt{17n^2+16n+17}}$$

$\Leftrightarrow 5(n+1) = \sqrt{17n^2 + 16n + 17}$. Với $n + 1 > 0 \Leftrightarrow n > -1$

$\Leftrightarrow 25n^2 + 50n + 25 = 17n^2 + 16n + 17 \Leftrightarrow 4n^2 + 17n + 4 = 0$,

phương trình này có nghiệm $n = \dfrac{-1}{4}$ (thoả mãn), $n = -4$ (loại)

Vậy $n = \dfrac{-1}{4}$ thoả mãn đề bài.

S3. Tam giác ABD có AC là trung tuyến, nên ta có:

$$AC^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}.$$

Suy ra $AD^2 = \dfrac{1}{2}(4.AC^2 + BD^2 - 2.\ AB^2) = \dfrac{1}{2}(4.16 + 100 - 2.\ 9) = 73$.

Vậy $AD \approx 8{,}5$.

S4. • Đường cao đi qua A nhận $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến. Ta có B = (-6 ; -1) ; C = (1 ; 1) nên $\overrightarrow{BC}$ = (7 ; 2). Đường cao này có phương trình: $7(x - 4) + 2(y - 5) = 0$ hay $7x + 2y - 38 = 0$.

• Tương tự, $\overrightarrow{AC}$ = (–3 ; –4) là vectơ pháp tuyến của đường cao đi qua B nên đường cao này phương trình:

$$-3(x + 6) - 4(y + 1) = 0 \text{ hay } 3x + 4y + 22 = 0.$$

• Đường cao đi qua C có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}$ = (–10 ; –6) nên ta có phương trình:

$$-10(x - 1) - 6(y - 1) = 0 \text{ hay } 5x + 3y - 8 = 0.$$

• Đường trung tuyến qua A(4 ; 5), với vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a ; b)$, có phương trình tổng quát

$$a(x - 4) + b(y - 5) = 0. \qquad (1)$$

Đường trung tuyến này đi qua trung điểm A' của BC, với:

$$A' = \left(\frac{-6+1}{2}; \frac{-1+1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}; 0\right).$$

Toạ độ A' phải nghiệm đúng phương trình (1) nên ta có:

$$a(-\frac{5}{2} - 4) + b(0 - 5) \text{ hay } 13a + 10b = 0.$$

Chọn a = 10 và b = –13 , phương trình (1) trở thành:

$$10x - 13y + 25 = 0.$$

• Tương tự, toạ độ trung điểm của AC là $(\frac{5}{2} ; 3)$, toạ độ này nghiệm đúng phương trình đường trung tuyến qua B:

$$a(x + 6) + b(y + 1) = 0,$$

do đó, $a(\frac{5}{2} + 6) + b(3 + 1) = 0$, hay $17a + 8b = 0$. Chọn a = 8 và b = –17 ta được phương trình $8x - 17y + 31 = 0$.

• Toạ độ trung điểm của AB là: (–1 ; 2), toạ độ này nghiệm đúng phương trình đường trung tuyến qua C:

$$a(x - 1) + b(y - 1) = 0,$$

suy ra $a(-1-1) + b(2 - 1) = 0$ hay $-2a + b = 0$. Chọn a = 1 và b = 2 ta được phương trình $x + 2y - 3 = 0$.

S5. **a)** Vì M thuộc đường thẳng d nên M(2 + 2t ; 3 + t). Theo đề bài, AM = 5 nên: AM = $\sqrt{(2+2t-0)^2+(3+t-1)^2}$ = 5, hay

$$(2 + 2t)^2 + (t + 2)^2 = 25 \Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0,$$

suy ra t = 1 hoặc $t = -\dfrac{17}{5}$.

Với t = 1 ta được điểm M = (2 + 2 ; 3 + 1) = (4 ; 4).

Với $t = -\dfrac{17}{5}$ ta có điểm $M' = (2-\dfrac{34}{5}\,;\,3-\dfrac{17}{5}) = (-\dfrac{24}{5}\,;\,-\dfrac{2}{5})$.

b) Để tìm giao điểm của d và d' ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

từ đó, t = –2 ; x = –2 ; y = 1. Vậy toạ độ giao điểm là N = (–2 ; 1).

S6. Dễ thấy rằng đỉnh C không thuộc hai cạnh đã cho của hình bình hành nên hai cạnh còn lại phải đi qua C và song song với hai cạnh đã cho (x – 3y = 0 và 2x + 5y + 6 = 0). Gọi A là đỉnh đối diện với C, gọi B và D là hai đỉnh còn lại. A chính là giao điểm của hai đường thẳng x – 3y = 0 và 2x + 5y + 6 = 0. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + 5y + 6 = 0 \end{cases}$$

ta được $y = -\dfrac{6}{11}$, $x = -\dfrac{18}{11}$. Vậy toạ độ đỉnh A là $\left(-\dfrac{18}{11}; -\dfrac{6}{11}\right)$.

Phương trình đường thẳng qua C(4 ; –1) và song song với đường thẳng x – 3y = 0 là: 1(x – 4) – 3(y + 1) = 0 hay x – 3y – 7 = 0.

Phương trình đường thẳng qua C(4 ; –1) và song song với đường thẳng 2x + 5y + 6 = 0 là: 2(x – 4) + 5(y + 1) = 0 hay

$$2x + 5y - 3 = 0.$$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 5y - 3 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ ta được

$$11y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{11},\ x = \frac{9}{11}.$$

Vậy toạ độ của B là $\left(\frac{9}{11};\frac{3}{11}\right)$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+5y+6=0 \\ x-3y-7=0 \end{cases}$ ta được

$$11y + 20 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{20}{11},\ x = 3y + 7 = \frac{17}{11}.$$

Vậy D có toạ độ là $\left(\frac{17}{11};-\frac{20}{11}\right)$.

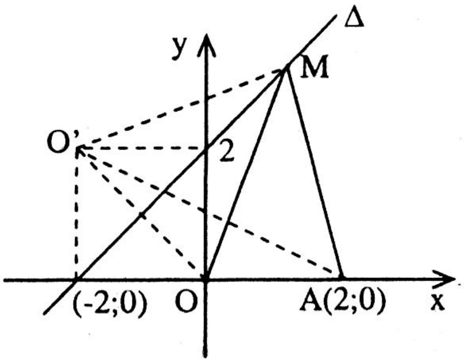
S7. **a)** Vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là vectơ pháp tuyến của đường thẳng 2x – 5y + 4 = 0, suy ra vectơ chỉ phương của nó là $\vec{u} = (2\ ;\ -5)$. Vì đường thẳng đi qua I(0 ; 3) nên phương trình tham số và phương trình chính tắc của nó lần lượt là

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3-5t \end{cases} \text{ và } \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-5}.$$

b) Vì $\overrightarrow{AB} = (-3\ ;\ 4)$ nên phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng AB lần lượt là:

$$\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 5+4t \end{cases} \text{ và } \frac{x-1}{-3} = \frac{y-5}{4}.$$

S8. **a)** Gọi O' là điểm đối xứng của O qua Δ, dễ thấy toạ độ của O' là (–2; 2).



b) Với điểm M bất kì trên Δ ta có

$$OM + MA = O'M + MA.$$

Vậy để O'M + MA ngắn nhất thì M phải là giao điểm của Δ và đường thẳng O'A. Phương trình đường thẳng O'A là

$$\frac{x+2}{2+2} = \frac{y-2}{0-2} \text{ hay } x + 2y - 2 = 0.$$

Giao điểm của Δ và đường thẳng x + 2y – 2 = 0 là điểm M $\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.

S9. Gọi I là trực tâm tam giác ABC. I chính là giao điểm của

BH và CK. Giải hệ gồm $-2x + y - 8 = 0$ và $2x + 3y - 6 = 0$ ta được toạ độ I là: $I\left(-\frac{9}{4}; \frac{7}{2}\right)$.

Đường cao AE qua hai điểm A và I nên có phương trình:

$$\frac{x-1}{-\frac{9}{4}-1} = \frac{y-1}{\frac{7}{2}-1}, \text{ hay } 10x + 13y - 23 = 0.$$

Đường thẳng AB có đỉnh A(1 ; 1) và vectơ chỉ phương chính là vectơ pháp tuyến (2; 3) của đường cao CK. Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} \Leftrightarrow 3x - 2y - 1 = 0$.

Tương tự, ta lập phương trình cạnh AC biết A(1 ; 1) và vectơ chỉ phương (–2; 1): $x + 2y - 3 = 0$.

Giải hệ tạo bởi giao hai đường thẳng BH ($-2x + y - 8 = 0$) và AB ($3x - 2y - 1 = 0$) ta có: B(–17; –26).

Giải hệ tạo bởi giao hai đường thẳng AC ($x + 2y - 3 = 0$) và CK ($2x + 3y - 6 = 0$) ta được: C(3; 0).

S10. Bài toán trở thành: tìm hai điểm A(a; 0) và B(0; b) sao cho

$$\begin{cases} MA = MB & (1) \\ (MA, MB) = 90^0 & (2) \end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-a; b)$, $\overrightarrow{MA} = (a - 2; -3)$, $\overrightarrow{MB} = (-2; b - 3)$.

(1) $\Leftrightarrow (a - 2)^2 + 9 = 4 + (b - 3)^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a = b^2 - 6b$

(2) $\Leftrightarrow 2(a - 2) + 3(b - 3) = 0 \Leftrightarrow 2a + 3b - 13 = 0$.

Nhưng hệ $\begin{cases} 2a + 3b - 13 = 0 \\ a^2 - 4a = b^2 - 6b \end{cases}$ vô nghiệm, nên suy ra không tồn tại đường thẳng thoả mãn đề bài.

S11. a) Khoảng cách từ điểm M(4 ; –5) đến đường thẳng

$$3x - 4y + 8 = 0 \text{ bằng: } \frac{|3.4 - 4.(-5) + 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{40}{5} = 8.$$

b) Phương trình tổng quát của đường thẳng: $3x - 2y + 4 = 0$, co đó

$$d = \frac{|3.4 + 2.5 + 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

S12. Đường thẳng $4x + 3y = 12$ cắt trục hoành tại B(3 ; 0) và cắt trục tung tại C(0 ; 4). Giả sử H(x ; y) là trực tâm của ΔABC. Từ $\cos(AH, BC) = 0$, $\cos(BH, AC) = 0$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -3(x-1) + 4(y-1) = 0 \\ -(x-3) + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 4y - 1 = 0 \\ -x + 3y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy toạ độ trực tâm H là H(– 3 ; – 2).

S13. **a)** $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$. Tâm đường tròn là I(1;1), bán kính R = 2.

***Cách khác:** Không làm như trên mà áp dụng lí thuyết.*

Trong phương trình tổng quát của đường tròn

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

Ta có A = –1, B = –1, C = –2. Vậy toạ độ tâm của đường tròn là (1 ; 1) và bán kính $R = \sqrt{1 + 1 + 2} = 2$.

b) $2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 1 - m^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - 2y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + (y-1)^2 - \frac{25}{16} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + (y-1)^2 - \frac{33}{16} - \frac{8}{16}m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{16}(8m^2 + 33).$$

Tâm đường tròn là $I\left(\frac{5}{4}; 1\right)$, $R = \frac{1}{4}\sqrt{8m^2 + 33}$.

Cách khác: Đưa phương trình đường tròn về dạng tổng quát

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - 2y + \frac{1 - m^2}{2} = 0$$

ta có:

$$A = -\frac{5}{4},\ B = -1,\ C = \frac{1-m^2}{2}.$$

Vậy đường tròn có tâm $I(-A; -B) = I\left(\frac{5}{4}; 1\right)$ và có bán kính

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - C} = \frac{1}{4}\sqrt{8m^2 + 33}.$$

S14. **a)** HD: Tâm I(2 ; –4), bán kính $R = \sqrt{2^2 + 4^2 + 5} = 5$.

b) Bằng cách thử trực tiếp, toạ độ điểm A(–1 ; 0) thoả mãn phương trình của đường tròn đã cho, do đó, ta cần viết phương trình đường thẳng đi qua A, có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IA} = (-3 ; 4)$. Phương trình đường thẳng này là

$$-3(x + 1) + 4(y - 0) = 0 \Leftrightarrow -3x + 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 3 = 0.$$

Cách khác: Sử dụng công thức ở phần lí thuyết:

$$(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0,$$

ta có $(2 + 1)(x + 1) + (-4 - 0)(y - 0) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 3 = 0$.

S15. Toạ độ giao điểm của hai đường tròn là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \end{cases}.$$

Trừ vế theo vế của hai phương trình trên ta được:

$$4x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Thay $x = -\frac{3}{2}$ vào phương trình đầu: $y^2 + 2y - \frac{7}{4} = 0$. Phương trình này có hai nghiệm là: $\frac{-2 \pm \sqrt{11}}{2}$. Vậy có hai giao điểm có toạ độ là: $\left(-\frac{3}{2}; \frac{-2+\sqrt{11}}{2}\right)$ và $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2+\sqrt{11}}{2}\right)$.

S16. Đường tròn có tâm O(0; 0), bán kính R = 2.

a) Tiếp tuyến cần tìm có phương trình $3x - y + C = 0$, với $C \neq 17$, sử dụng điều kiện về tiếp tuyến (khoảng cách từ tâm O đến tiếp tuyến bằng R) ta có:

$$\frac{|C|}{\sqrt{10}} = 2 \Rightarrow C = \pm 2\sqrt{10}.$$

Ta được hai phương trình tiếp tuyến là $3x - y + 2\sqrt{10} = 0$ và $3x - y - 2\sqrt{10} = 0$.

b) Tiếp tuyến cần tìm có phương trình $2x - y + C = 0$. Từ đó ta có: $\frac{|C|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow C = \pm 2\sqrt{5}$. Ta được hai phương trình tiếp tuyến là:

$2x - 2y + 2\sqrt{5} = 0$ và $2x - 2y - 2\sqrt{5} = 0$.

c) Tiếp tuyến cần tìm có phương trình:

$$A(x - 2) + B(y + 2) = 0 \ (A^2 + B^2) \neq 0.$$

Từ điều kiện tiếp xúc ta có:

$$\frac{|-2A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \text{, suy ra } A.B = 0.$$

Nếu $A = 0$ thì $B \neq 0$, ta được tiếp tuyến $y + 2 = 0$.

Nếu $B = 0$ thì $A \neq 0$, ta được tiếp tuyến $x - 2 = 0$.

S17. ***Cách 1.*** Giả sử phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Vì (C) đi qua A(–1; 2), B(2; 0) và C(– 3; 1) nên ta nhận được ba phương trình tương ứng:

$$5 + 2a - 4b + c = 0. \quad (1)$$

$$4 - 4a + c = 0. \quad (2)$$

$$10 + 6a - 2b + c = 0. \quad (3)$$

Giải hệ gồm ba phương trình trên ta được

$$a = -\frac{11}{14}, b = -\frac{13}{14}, c = -\frac{50}{7}.$$

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là I(–11/14; –13/14).

Cách 2. Trung điểm AB có tọa độ là M(1/2; 1). Đường trung trực của AB qua M có vectơ pháp tuyến (3; –2) nên phương trình đường trung trực AB là: $3x - 2y - \frac{1}{2} = 0$. Gọi N là trung điểm BC, đường trung trực BC có phương trình là: $-5x + y - 3 = 0$.

Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x - 2y + \dfrac{1}{2} = 0 \\ -5x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11/14 \\ y = -13/14 \end{cases}.$$

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $I(-11/14; -13/14)$.

S18. Đường tròn (C) có tâm O = (0 ; 0) và bán kính R = 1. Đường tròn (C') với phương trình $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 16$ có tâm O'(8 ; 6) và bán kính R' = 4.

Để đường thẳng Ax + By + C = 0 là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đã cho thì khoảng cách từ O và O' tới đường thẳng này lần lượt phải bằng 1 và 4. Ta có:

$$\frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 \text{ và } \frac{|8A + 6B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 4.$$

Từ đó suy ra $|8A + 6B + C| = 4|C|$ hay $8A + 6B + C = \pm 4C$.

- Nếu $8A + 6B + C = 4C \Leftrightarrow 3C = 8A + 6B$ thì

$$9C^2 = 64A^2 + 96AB + 36B^2.$$

Vì $\dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$ nên $C^2 = A^2 + B^2$. Vậy:

$$64A^2 + 96AB + 36B^2 = 9A^2 + 9B^2 \text{ hay } 55A^2 + 96AB + 27B^2 = 0.$$

Giải phương trình trên với ẩn là A ta được:

$$A = \frac{-48B \pm 3B\sqrt{91}}{55}.$$

Chọn B = 55 thì $A = -48 \pm 3\sqrt{91}$ và $C = -18 \pm 8\sqrt{91}$.

Vậy có hai tiếp tuyến chung là:

$$(-48 + 3\sqrt{91})x + 55y - 18 + 8\sqrt{91} = 0 \text{ và}$$

$$(-48 - 3\sqrt{91})x + 55y - 18 - 8\sqrt{91} = 0.$$

- Nếu $8A + 6B + C = -4C$, hay $5C = -8A - 6B$ thì

$$25C^2 = 64A^2 + 96AB + 36B^2 = 25A^2 + 25B^2$$

hay $39A^2 + 96AB + 11B^2 = 9$.

Giải phương trình trên đối với ẩn là A ta có

$$A = \frac{(-48 \pm 25\sqrt{3})B}{39}.$$

Chọn $B = 39$ thì $A = -48 \pm 25\sqrt{3}$ và $C = 30 \mp 40\sqrt{3}$.

Vậy còn hai tiếp tuyến chung khác là:

$$(-48 + 25\sqrt{3})x + 39y + 30 - 40\sqrt{3} = 0,$$
$$(-48 - 25\sqrt{3})x + 39y + 30 + 40\sqrt{3} = 0.$$

S19. **a)** Giả sử có điểm $M = (x ; y)$ thuộc cônic đã cho thì

$$MF = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}.$$

Khoảng cách d từ M đến đường chuẩn $y = 0$ là : $d = |y|$. Theo định nghĩa của đường cônic ta có $\frac{MF}{d} = e$ hay $\frac{MF}{|y|} = 1$. Từ đó ta có $MF^2 = y^2$ hay $(x-2)^2 + (y-3)^2 = y^2$ hay $x^2 - 4x - 6y + 13 = 0$. Đó là phương trình cônic đã cho, cônic này là parabol, vì $e = 1$.

b) Giả sử có điểm $M = (x ; y)$ thuộc cônic đã cho thì

$$MF = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}.$$

Khoảng cách d từ M đến đường chuẩn $y = 0$ là $d = |y|$. Theo định nghĩa của cônic ta có: $\frac{MF}{d} = e$ hay $\frac{MF}{|y|} = \frac{1}{2}$, hay

$$2MF = |y|.$$

Từ đó ta có $4[x^2 + (y-3)^2] = y^2$ hay $4x^2 + 3y^2 - 24y + 36 = 0$. Đó là phương trình cônic đã cho, nó là elíp, vì $e < 1$.

S20. **a)** Hypebol có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (do tiêu điểm nằm trên Ox). Ta có $2c = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 + b^2 = 3$.

Từ giả thiết ta có $\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{2a}{3}$.

Từ đó $a^2 + \frac{4a^2}{9} = 3 \Rightarrow a^2 = \frac{27}{13}, b^2 = \frac{12}{13}$.

Vậy phương trình hypebol là: $\frac{x^2}{\frac{27}{13}} - \frac{y^2}{\frac{12}{13}} = 1$.

b) Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c = \sqrt{5}a \\ \dfrac{10}{b^2} - \dfrac{36}{a^2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5a^2 \\ \dfrac{10}{b^2} - \dfrac{36}{a^2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{67}{2} = 33,5 \\ b^2 = 134 \end{cases}.$$

Do tiêu điểm nằm trên Oy nên phương trình của hypebol là

$$\frac{x^2}{33,5} - \frac{y^2}{134} = -1.$$

S21. a) Bán kính đường tròn cần tìm là: $R = \dfrac{|6 - 5 + 3|}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Phương trình đường tròn: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = \dfrac{16}{5}$.

b) Đặt A'(x'; y'), do A' đối xứng với A qua Δ nên

$$AA' \perp \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 + 2t \\ y' = 5 - t \end{cases}$$

và khoảng cách từ A, A' đến Δ bằng nhau, tức là

$$2x' - y' + 3 = -(6 - 5 + 3) = -4 \Leftrightarrow 2(3 + 2t) - (5 - t) = -7$$

$$\Leftrightarrow 5t = -8 \Leftrightarrow t = -\frac{8}{5}.$$

Từ đó ta được $A'\left(-\dfrac{1}{5}; \dfrac{33}{5}\right)$.

c) Giả sử vectơ pháp tuyến của Δ' là (α, β). Khi đó

$$(\Delta, \Delta') = 60^0 \Leftrightarrow \cos(\Delta, \Delta') = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|2\alpha - \beta|}{\sqrt{5(\alpha^2 + \beta^2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |4\alpha - 2\beta| = \sqrt{5(\alpha^2 + \beta^2)} \Leftrightarrow 11\alpha^2 - 8\alpha\beta - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{8 \pm 5\sqrt{5}}{11}\beta.$$

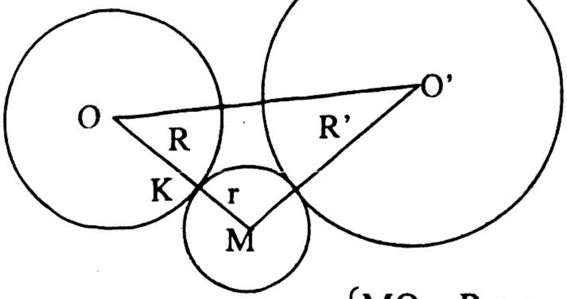
Chọn $\beta = 11$, ta có $\alpha = 8 \pm 5\sqrt{5}$. Ta được hai phương trình đường thẳng Δ' tương ứng là $(8 + 5\sqrt{5})(x - 3) + 11(y - 5) = 0$ và

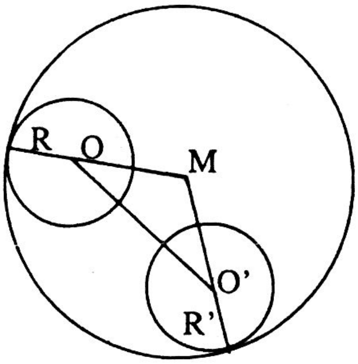
$$(8 - 5\sqrt{5})(x - 3) + 11(y - 5) = 0.$$

Chú ý. Có thể tiến hành: Tìm hình chiếu H của A trên Δ. Tìn B, C ∈ Δ sao cho $HB = HC = \dfrac{1}{\sqrt{3}}AA'$. Viết phương trình AB, AC, đây chính là hai phương trình đường thẳng Δ' tương ứng.

S22. Giả sử đường tròn (M; r) tiếp xúc với cả hai đường tròn (O; R) và (O'; R'). Có thể xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp 1. Đường tròn (M) cùng tiếp xúc trong hay cùng tiếp xúc ngoài với hai đường tròn đã cho. Khi đó ta có

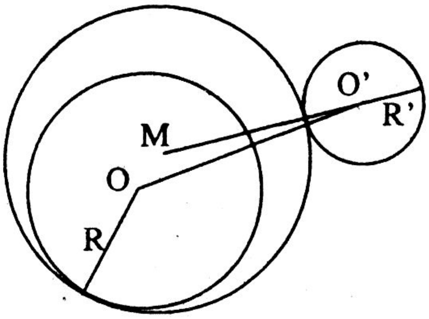




$$\begin{cases} MO = R + r \\ MO' = R' + r \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} MO = -R + r \\ MO' = -R' + r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow MO - MO' = \pm (R - R') \Leftrightarrow |MO - MO'| = |R - R'|. \quad (1)$$

Trường hợp 2. Đường tròn (M) tiếp xúc trong với một đường tròn và tiếp xúc ngoài với đường tròn kia. Khi đó ta có



$$\begin{cases} MO = R + r \\ MO' = r - R' \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} MO = r - R' \\ MO' = r + R \end{cases}, \text{ suy ra}$$

$$MO - MO' = \pm(R + R')$$

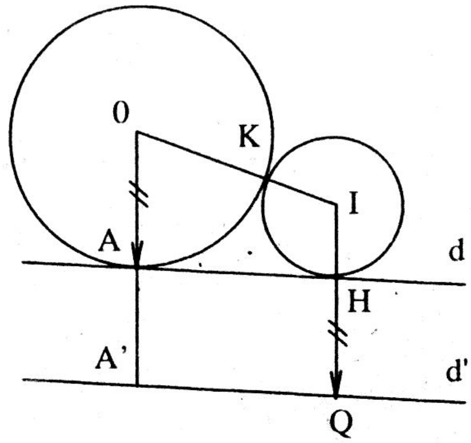
$$\Leftrightarrow |MO - MO'| = R + R'. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta kết luận:

+ Nếu R ≠ R', tâm các đường tròn (M) thuộc một trong hai hypebol có cùng tiêu điểm O, O' và độ dài trục thực tương ứng bằng $|R - R'|$, $R + R'$.

+ Nếu R = R', tâm các đường tròn (M) thuộc đường trung trực của đoạn OO' hoặc thuộc hypebol có tiêu điểm O, O' và độ dài trục thực bằng 2R.

S23. Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm A. Gọi (I ; r) là đường tròn thay đổi, tiếp xúc với Δ tại H và tiếp



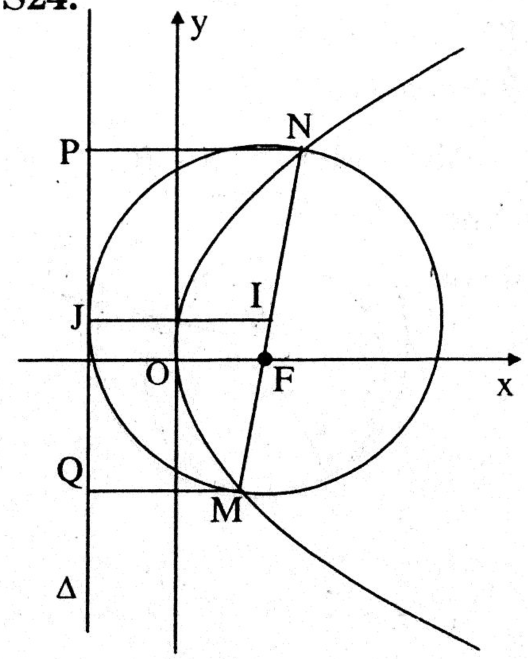
xúc với (O) tại K. Trên tia OA lấy điểm A' sao cho AA' = OA, và gọi (d) là đường thẳng đi qua A' và song song với Δ. Ta có :

$$IO = IK + KO = r + OA,$$

$$IQ = IH + HQ = r + OA.$$

Do đó, điểm I cách đều đường thẳng (d) và điểm O. Vậy quỹ tích tâm I là parabol với O là tiêu điểm và (d) là đường chuẩn.

S24.



Không mất tính tổng quát, giả sử parabol có dạng như hình vẽ. Hình thang vuông MNPQ có IJ là đường trung bình nên $d(I, \Delta) = IJ = \frac{1}{2}(MQ + NP)$. Ta có MN đi qua tiêu điểm F của parabol và M, N thuộc parabol, nên MQ + NP = MN. Vậy $d(I, \Delta) = \frac{1}{2}MN$, do đó đường tròn đường kính MN tiếp xúc với đường chuẩn Δ.

S25. Chọn một gốc bất kì rồi kí hiệu ba vector biểu diễn ba điểm A, B, C lần lượt là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Khi đó, điểm D nằm bên trong tam giác sẽ được biểu diễn bởi vector $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$, với λ, μ, ν là ba số thực dương có tổng bằng 1. Giả sử $\lambda > \frac{1}{2}$. Ta xét điểm được biểu diễn bởi vector $2\vec{d} - \vec{a}$. Vì $\vec{d}$ và $\vec{a}$ có toạ độ nguyên nên điểm này cũng nguyên. Mặt khác,

$$2\vec{d} - \vec{a} = (2\lambda - 1)\vec{a} + 2\mu\vec{b} + 2\nu\vec{c},$$

tức là nó cũng nằm bên trong tam giác (do các thành phần đứng trước dương và có tổng bằng $(2\lambda - 1) + 2\mu + 2\nu = 1$). Theo giả thiết, điểm này phải trùng với D. Vậy $2\vec{d}-\vec{a}=\vec{d}$. Điều này mâu thuẫn. Tương tự, nếu $\lambda=\frac{1}{2}$ thì $2\vec{d}-\vec{a}=2\mu\vec{b}+2\nu\vec{c}$, nên suy ra D nằm trên đoạn thẳng BC (trừ B và C). Điều này mâu thuẫn.

Từ đó, ta có $\lambda<\frac{1}{2}$. Cũng tương tự như trên, ta được $\mu<\frac{1}{2}$ và $\nu<\frac{1}{2}$. Bây giờ, ta xét điểm được biểu diễn bởi

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-2\vec{d}=(1-2\lambda)\vec{a}+(1-2\mu)\vec{b}+(1-2\nu)\vec{c}.$$

Các thành phần biểu diễn trên là dương và có tổng bằng 1, đằng khác, nó cũng là điểm nguyên. Vậy nó phải trùng D. Suy ra

$$\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})/3,$$

nói cách khác, D chính là trọng tâm tam giác ABC.

S26. Gọi O là tâm hình vuông, lập hệ trục xOy sao cho các điểm A, B, C, D lần lượt có toạ độ là $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$. Khi đó, dễ dàng tính được toạ độ các điểm K, L, M, N lần lượt là:

$$(0,-2k),\ (2k,0),\ (0,2k),\ (-2k,0),\ \text{với } k=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

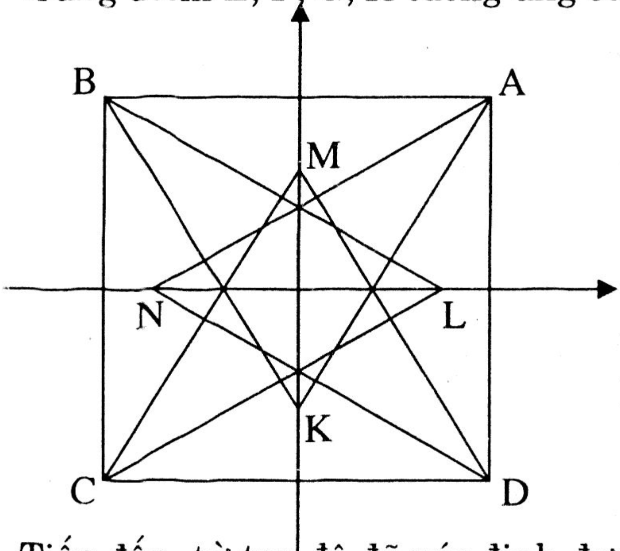
Từ đó, dùng công thức tính toạ độ trung điểm, ta tính được toạ độ các trung điểm E, F, G, H tương ứng của KL, LM, MN, NK là:

$$(k,-k),\ (k,k),\ (-k,k),\ (-k,-k).$$

Suy ra rằng các khoảng cách từ E, F, G, H đến O đều bằng nhau và bằng:

$$\sqrt{k^2+k^2}=k\sqrt{2},$$

đồng thời các vector gốc O, điểm mút tương ứng là E, F, G, H hợp với trục hoành các góc lần lượt là 315°, 45°, 135°, 225°.



Tiếp đến, từ toạ độ đã xác định được của các điểm trên, ta dễ dàng tính được toạ độ tương ứng của các trung điểm P, Q, R, S, T, U, V, X của các cạnh AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN lần lượt là:

$$(h,j),(-h,j),(-j,h),(-j,-h),\ (-h,-j),(h,-j),(j,-h),(j,h),$$

ở đây: $h = \frac{1}{2}$, $j = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Suy ra những điểm P, Q, R, S, T, U, V, X cách đều O một đoạn bằng

$$\sqrt{h^2 + j^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = k\sqrt{2}.$$

Các điểm này cũng là đầu mút của những vector gốc O lần lượt hợp với trục hoành các góc tương ứng 15^0, 165^0, 105^0, 255^0, 195^0, 345^0, 285^0, 75^0.

Tiếp đến, ta cần xét các góc của tam giác vuông có ba cạnh là k, h, j. Góc x giữa h và k có

$$\sin x = \frac{j}{k}, \cos x = \frac{h}{k}.$$

Do đó $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2hj}{k^2} = \frac{1}{2}$. Suy ra $x = 15^0$.

Như vậy, 12 điểm nói trên cách đều gốc O và là đầu mút của những vector gốc O hợp với trục hoành các góc $15^0 + 30n$, với

$$n = 0, 1, 2, ..., 11.$$

Từ đó, suy ra rằng chúng lập thành một đa giác đều 12 cạnh (điều phải chứng minh).

MỤC LỤC

Chương 1. VECTƠ 5

§ 1. Cộng, trừ vectơ, nhân vectơ với một số 5

§ 2. Tích vô hướng của hai vectơ 13

LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN CÁC BÀI TẬP CHƯƠNG 1 19

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 1 29

Chương 2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN 41

§ 1. Các hệ thức trong tam giác 41

§ 2. Phương tích, trục đẳng phương, tâm đẳng phương 52

LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN CÁC BÀI TẬP CHƯƠNG 2 63

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 2 81

Chương 3. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG 91

§ 1. Tọa độ vectơ, tọa độ điểm 91

§ 2. Phương trình tổng quát, phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng 101

§ 3. Khoảng cách và góc 117

§ 4. Đường tròn 124

§ 5. Đường elip, đường hypebol, đường parabol, ba đường cônic 137

LỜI GIẢI HOẶC HƯỚNG DẪN CÁC BÀI TẬP CHƯƠNG 3 155

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 3 182

Một số bài toán ôn tập cuối năm 196

A. Đề bài 196

B. Lời giải hoặc hướng dẫn 200

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 9715012; (04) 7685236.
Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập nội dung
THU HIỀN
Sửa bài
NGUYỄN NAM
Trình bày bìa
HOÀNG VĨNH

BỒI DƯỠNG TOÁN HÌNH HỌC 10
Mã số: 1L-70 ĐH2006
In 2.000 cuốn, khổ 17x24 tại Công ti cổ phần in Bến Tre
Số xuất bản: 461-2006/CXB/4-70/ĐHQGHN, ngày 12/06/2006.
Quyết định xuất bản số: 196 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2006